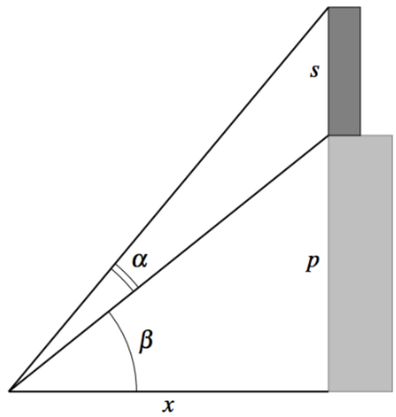
Exercice 1 **(Autour de la fonction Arctan)**

① Rappeler la définition de la fonction Arctan, et tracer son graphe.

② Démontrer l'identité trigonométrique suivante :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2 **(Statue de la liberté)**



Une statue de hauteur s est posée sur un piédestal de hauteur p. Un observateur est placé à une distance horizontale x de la statue. On note

- α l'angle d'observation de la statue,
- β l'angle d'observation du piédestal.

Le but de l'exercice est de déterminer à quelle distance optimale (notée x_0) l'observateur doit se placer pour voir la statue sous son angle maximal (noté α_0). Pour résoudre l'exercice, on étudiera la fonction α, définie sur $]0,+\infty[$, qui exprime la relation entre l'angle α et la distance x de l'observateur.

① Intuitivement (graphiquement), donner les limites aux bornes de l'intervalle de définition de la fonction α, à savoir

$$\lim_{x\to 0^+} \alpha(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \alpha(x).$$

② Exprimer $\tan(\beta)$ et $\tan(\alpha+\beta)$ en fonction de x, p et s.

③ En déduire que, pour tout $x > 0$, on a

$$\alpha(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{p+s}{x}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{p}{x}\right).$$

④ Déterminer rigoureusement les limites : $\lim_{x\to 0^+} \alpha(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} \alpha(x)$, afin de confirmer l'intuition de la question 1.

⑤ Montrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$\alpha'(x) = \frac{s(p(p+s) - x^2)}{(x^2+p^2)(x^2+(p+s)^2)}$$

⑥ En déduire que la distance optimale est $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$.

⑦ Montrer que l'angle optimal $\alpha_0 = \alpha(x_0)$ vaut

$$\alpha_0 = \operatorname{Arctan}\left(\frac{s}{2x_0}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}\right).$$

On pourra utiliser l'identité trigonométrique suivante :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$

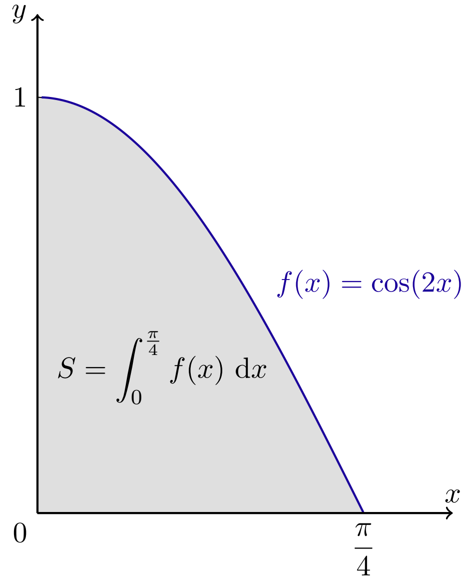
⑧ Application numérique : pour la statue de la liberté, on a $s = 46\ m$ et $p = 47\ m$. Que valent respectivement la distance optimale d'observation et l'angle optimal associé ?

Exercice 3 (Centre de gravité d'une plaque homogène)

On considère une plaque homogène délimitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées ainsi que la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par

$$f(x) = \cos(2x).$$

Dans le dessin ci-contre, la plaque homogène est représentée par la partie grisée. Le but de cet exercice est de déterminer le centre de gravité G de la plaque homogène.



① Calculer l'aire de la plaque, à savoir $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\ \mathrm{d}x$.

② On admet que l'abscisse x_G du centre de gravité G de la plaque s'écrit comme

$$x_G = \frac{1}{S}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{S}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\ \mathrm{d}x.$$

Notons $h(x) = x\cos(2x)$ et $H(x) = \dfrac{x\sin(2x)}{2} + \dfrac{\cos(2x)}{4}$. Montrer que H est une primitive de h, et en déduire le calcul de x_G.

③ On admet que l'ordonnée y_G du centre de gravité G de la plaque s'écrit comme

$$y_G = \frac{1}{2S}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2S}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2x)\ \mathrm{d}x.$$

On rappelle l'identité trigonométrique suivante : pour tout $x \in \mathbb{R},\ \cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$. Déduire de cette identité la valeur de y_G.

④ En déduire les coordonnées du centre de gravité de la plaque.

⑤ D'après un théorème dit de Guldin, la rotation autour de l'axe (Oy) de la plaque homogène engendre un solide de révolution renfermant un volume $\mathcal{V}$ donné par

$$\mathcal{V} = 2\pi x_G S.$$

Donner une valeur approchée de $\mathcal{V}$.