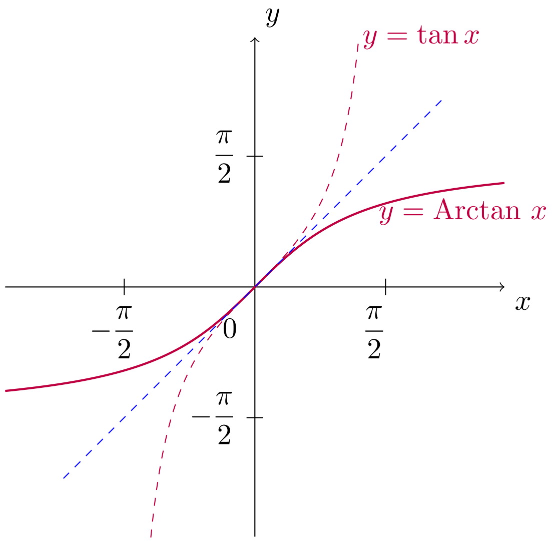
Exercice 1 **(Autour de la fonction Arctan)**

① La fonction tangente restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, en tant que fonction continue et strictement croissante, réalise une bijection de l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $J = \tan(I) = \mathbb{R}$. On appelle *fonction arctangente*, et on note Arctan, la réciproque de la fonction tangente restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.



② Notons f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Il s'agit de montrer que cette fonction est constante égale à $\frac{\pi}{2}$: pour cela, montrons tout d'abord que sa dérivée est nulle. Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{\frac{1}{\cancel{x^2}}}{\frac{x^2+1}{\cancel{x^2}}} \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puisque la dérivée de f est nulle sur $]0, +\infty[$, la fonction f est constante sur cet intervalle. Ayant

$$f(1) = \text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

on en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 2 **(Statue de la liberté)**

① Intuitivement, on a

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \alpha(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \alpha(x) = 0}$$

② On a

$$\boxed{\tan(\beta(x)) = \frac{p}{x} \text{ et } \tan(\alpha(x)+\beta(x)) = \frac{p+s}{x}}$$

③ D'après les égalités ci-dessus, on a

$$\beta(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{p}{x}\right) \quad \text{et} \quad \alpha(x)+\beta(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{p+s}{x}\right),$$

d'où

$$\boxed{\alpha(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{p+s}{x}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{p}{x}\right)}$$

④ On a

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{p+s}{x}\right) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{X\to +\infty} \operatorname{Arctan}(X) = \frac{\pi}{2},$$

d'où : $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{Arctan}\left(\frac{p+s}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$. De la même manière, on trouve : $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{Arctan}\left(\frac{p}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$. Par somme, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha(x) = 0}$. Un raisonnement au voisinage de $+\infty$ montre aussi que $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} \alpha(x) = 0}$

⑤ Soit $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\alpha'(x) &= -\frac{\dfrac{p+s}{x^2}}{1+\left(\dfrac{p+s}{x}\right)^2} + \frac{\dfrac{p}{x^2}}{1+\left(\dfrac{p}{x}\right)^2} \\
&= -\frac{\dfrac{p+s}{\cancel{x^2}}}{\dfrac{x^2+(p+s)^2}{\cancel{x^2}}} + \frac{\dfrac{p}{\cancel{x^2}}}{\dfrac{x^2+p^2}{\cancel{x^2}}} \\
&= -\frac{p+s}{x^2+(p+s)^2} + \frac{p}{x^2+p^2} \\
&= \frac{p(x^2+(p+s)^2) - (p+s)(x^2+p^2)}{(x^2+p^2)(x^2+(p+s)^2)} \\
&= \frac{\cancel{px^2} + p(p+s)^2 - \cancel{px^2} - p^3 - sx^2 - p^3}{(x^2+p^2)(x^2+(p+s)^2)} \\
&= \frac{p^3+2p^2s+ps^2-p^3-sx^2-p^3}{(x^2+p^2)(x^2+(p+s)^2)} \\
&= \frac{sp^2+ps^2-sx^2}{(x^2+p^2)(x^2+(p+s)^2)},
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\alpha'(x) = \frac{s(p(p+s) - x^2)}{(x^2+p^2)(x^2+(p+s)^2)}}$$

⑥ En notant $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$, on a, pour tout $x > 0$,

$$\alpha'(x) = \frac{s(x_0 - x)(x_0 + x)}{(x^2+p^2)(x^2+(p+s)^2)},$$

donc la fonction α est croissante sur $[0, x_0]$ puis décroissante sur $[x_0, +\infty[$. La fonction α atteint donc bien son maximum en $x_0 = \sqrt{p(p+s)}$.

⑦ En utilisant l'identité

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

appliquée en $a = \text{Arctan}\left(\frac{p+s}{x_0}\right)$ et $b = \text{Arctan}\left(\frac{p}{x_0}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha(x_0)) &= \frac{\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{p+s}{x_0}\right)\right) - \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{p}{x_0}\right)\right)}{1 + \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{p+s}{x_0}\right)\right)\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{p}{x_0}\right)\right)} \\
&= \frac{\frac{p+s}{x_0} - \frac{p}{x_0}}{1 + \left(\frac{p+s}{x_0}\right)\left(\frac{p}{x_0}\right)} \\
&= \frac{\frac{s}{x_0}}{1 + \left(\frac{p(p+s)}{x_0^2}\right)} \\
&= \frac{s}{2x_0}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\alpha_0 = \text{Arctan}(\tan(\alpha(x_0))) = \text{Arctan}\left(\frac{s}{2x_0}\right)$, et donc

$$\boxed{\alpha_0 = \text{Arctan}\left(\frac{s}{2\sqrt{p(p+s)}}\right)}$$

⑧ Pour la statue de la liberté, on a $x_0 = \sqrt{47(46+47)} \simeq 66\ m$ et $\alpha_0 \simeq 0.334\ rad \simeq 19^\circ$.

Exercice 3 (Centre de gravité d'une plaque homogène)

① On a

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

d'où

$$\boxed{S = \frac{1}{2}}$$

② Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$H'(x) = \frac{\sin(2x)}{2} + x\cos(2x) - \frac{\sin(2x)}{2} = x\cos(2x) = h(x),$$

donc H est une primitive de h. On en déduit que

$$x_G = \frac{1}{S}\left[H(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\left[\frac{x\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right),$$

d'où

$$\boxed{x_G = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$$

③ On a

$$y_G = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(4x)}{2}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\ \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(4x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} + \left[\frac{\sin(4x)}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{4}},$$

d'où

$$\boxed{y_G = \frac{\pi}{8}}$$

④ Les coordonnées du centre de gravité de la plaque sont

$$\boxed{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}, \frac{\pi}{8}\right)}$$

⑤ On a

$$\boxed{\mathcal{V} = 2\pi x_G S = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}}$$

Une valeur approchée de $\mathcal{V}$ à 10^{-2} près (obtenue grâce à la calculatrice) est $\boxed{0{,}90}$.