Il y a 5 exercices qui valent tous 4 points - essayez de passer environ 25 minutes par exercice. Bon courage !

Exercice 1 (Trigonométrie) [4 points]

1. Rappeler la définition de la fonction Arctan, et tracer son graphe. Que vaut $\mathrm{Arctan}'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$?

2. Donner les valeurs exactes de

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right), \quad \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right), \quad \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right), \quad \mathrm{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \mathrm{Arctan}\,(0) \quad \text{et} \quad \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{3}\right).$$

3. Soient a et b deux réels. Exprimer la quantité $\cos(a+b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$. En déduire que pour tout réel x, on a

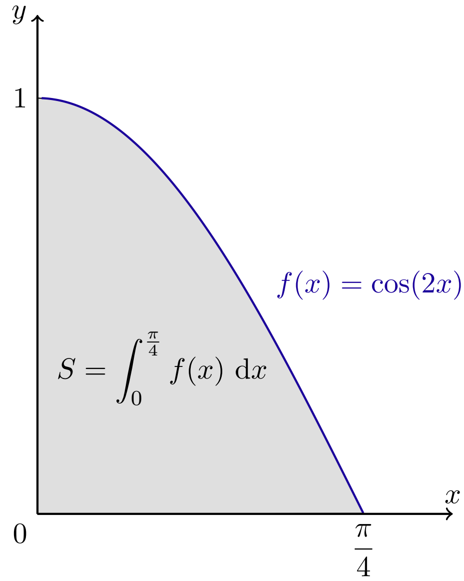
$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Exercice 2 (Centre de gravité d'une plaque homogène) [4 points]

On considère une plaque homogène délimitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées ainsi que la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par

$$f(x) = \cos(2x).$$

Dans le dessin ci-contre, la plaque homogène est représentée par la partie grisée. Le but de cet exercice est de déterminer le centre de gravité de la plaque homogène.



1. Calculer l'aire de la plaque, à savoir $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\ \mathrm{d}x$.

2. On admet que l'abscisse x_G du centre de gravité G de la plaque s'écrit comme

$$x_G = \frac{1}{S}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{S}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\ \mathrm{d}x.$$

A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur de x_G.

3. On admet que l'ordonnée y_G du centre de gravité G de la plaque s'écrit comme

$$y_G = \frac{1}{2S}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2S}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2x)\ \mathrm{d}x.$$

A l'aide de la formule de duplication rappelée dans la question 3 de l'Exercice 1, calculer la valeur de y_G.

4. En déduire les coordonnées du centre de gravité de la plaque.

5. D'après un théorème dit de Guldin, la rotation autour de l'axe (Oy) de la plaque homogène engendre un solide de révolution renfermant un volume $\mathcal{V}$ donné par

$$\mathcal{V} = 2\pi x_G S.$$

Donner une valeur approchée de $\mathcal{V}$.

Exercice 3 (Étude d'une fraction rationnelle) [4 points]

Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{2x - 6}.$$

1. Faire l'étude complète de la fonction f. Afin de tracer les asymptotes de f, on pourra rechercher trois réels A, B et C tels que

$$f(x) = Ax + B + \frac{C}{2x - 6}.$$

2. Soit $k \in \mathbb{R}$. Considérons l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = k.$$

Discuter du nombre de solutions de cette équation en fonction de la valeur du réel k.

Exercice 4 (Racines d'un polynôme) [4 points]

Considérons le polynôme P défini par

$$P(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 6.$$

On admet que le réel -2 est une racine de P.

1. En effectuant une division euclidienne, factoriser P par $(x + 2)$.
2. Déterminer la factorisation de P en produit de polynômes irréductibles.

Exercice 5 (Arche du Gateway) [4 points]

On définit la fonction cosinus hyperbolique ch : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ainsi que la fonction sinus hyperbolique sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que la fonction ch est paire, et que la fonction sh est impaire.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer les propriétés suivantes :

$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x), \qquad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

L'arche du Gateway à Saint-Louis (Missouri) possède la forme d'un cosinus hyperbolique renversé. Elle s'élève à 192 mètres en son centre et enjambe 192 mètres à sa base. Les points de cette arche sont approximativement les points du graphe de la fonction G définie sur l'intervalle $[-96, 96]$ par

$$\boxed{G(x) = -39\mathrm{ch}\left(\frac{x}{39}\right) + 231}$$

3. Quelle est l'aire comprise entre le sol et l'arche du Gateway ?
4. On admet que la longueur $\mathcal{L}$ de l'arche est donnée par la formule

$$\mathcal{L} = \int_{-96}^{96} \sqrt{1 + (G'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

Que vaut la longueur de l'arche ? (On pourra utiliser à bon escient la question 2 de cet exercice)