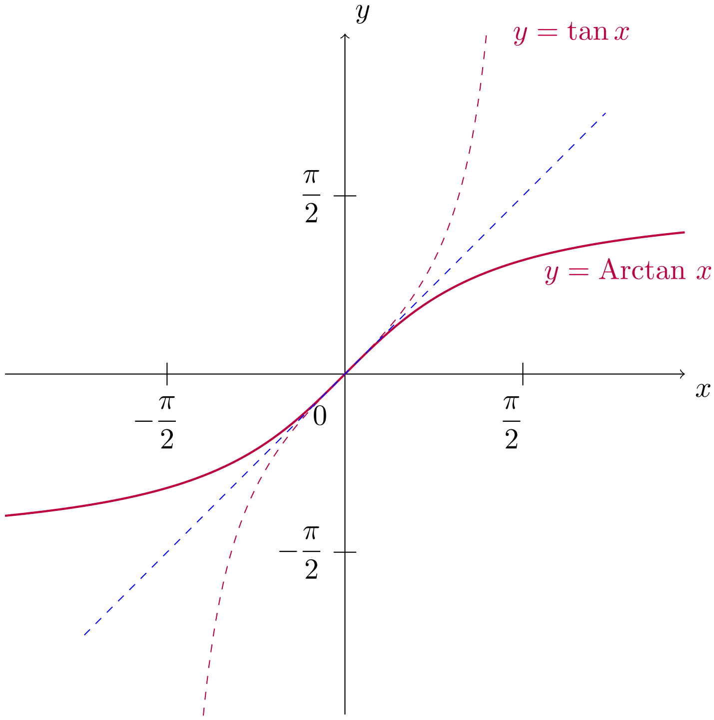
Exercice 1 (Trigonométrie)

1. La fonction tangente restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, en tant que fonction continue et strictement croissante, réalise une bijection de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. On appelle *fonction arctangente*, et on note Arctan, la réciproque de $\tan_{\left|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right.}$. La fonction Arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$



2. On a

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3}, \qquad \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}, \qquad \operatorname{Arctan}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

3. Soient a et b deux réels. La formule d'addition s'écrit

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on prenant $a = x$ et $b = x$ dans la formule encadrée ci-dessus, on obtient

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

De plus, en utilisant la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on obtient $-\sin^2(x) = \cos^2(x) - 1$, donc $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ et on en déduit que

$$\boxed{\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}}$$

Exercice 2 (Centre de gravité d'une plaque homogène)

1. On a

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

d'où

$$\boxed{S = \frac{1}{2}}$$

2. En posant $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos(2x)$, on a $u'(x) = 1$ et $v(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2}$ et la formule d'intégration par parties donne

$$x_G = \frac{1}{S}\left\{\left[x\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{2}\ \mathrm{d}x\right\} = 2\left\{\frac{\pi}{8} - \left[\frac{-\cos(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right\} = 2\left\{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right\},$$

d'où

$$\boxed{x_G = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$$

3. On a

$$y_G = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(4x)}{2}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\ \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(4x)}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} + \left[\frac{\sin(4x)}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{4}},$$

d'où

$$\boxed{y_G = \frac{\pi}{8}}$$

4. Les coordonnées du centre de gravité de la plaque sont

$$\boxed{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},\ \frac{\pi}{8}\right)}$$

5. On a

$$\boxed{\mathcal{V} = 2\pi x_G S = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}}$$

Une valeur approchée de $\mathcal{V}$ à 10^{-2} près (obtenue grâce à la calculatrice) est $\boxed{0{,}90}$.

Exercice 3 (Étude d'une fraction rationnelle)

1. La fonction f est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Pour tout $x \in D_f$, on trouve après calculs et factorisation de la dérivée,

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x-5)}{(2x-6)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Justification des limites aux bornes en $+\infty$ et $-\infty$: on factorise au numérateur et au dénominateur par le terme dominant. Pour tout $x \in D_f$, on a

$$f(x) = \frac{x^2\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{x\left(2 - \frac{6}{x}\right)} = x\frac{\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}{2 - \frac{6}{x}},$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Justification des limites aux bornes en 3 : on a

$$\lim_{x\to3^+} x^2 - 4x + 7 = 4, \qquad \lim_{x\to3^+} 2x - 6 = 0^+ \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to3^-} x - 6 = 0^-,$$

ainsi

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty.$$

Recherche des droites asymptotes à la courbe. A l'aide d'une division euclidienne ou bien d'une identification, on obtient que pour tout $x \in D_f$,

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{4}{2x-6}.$$

Il vient de l'expression précédente que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{2x-6} = 0.$$

De même,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{2x-6} = 0.$$

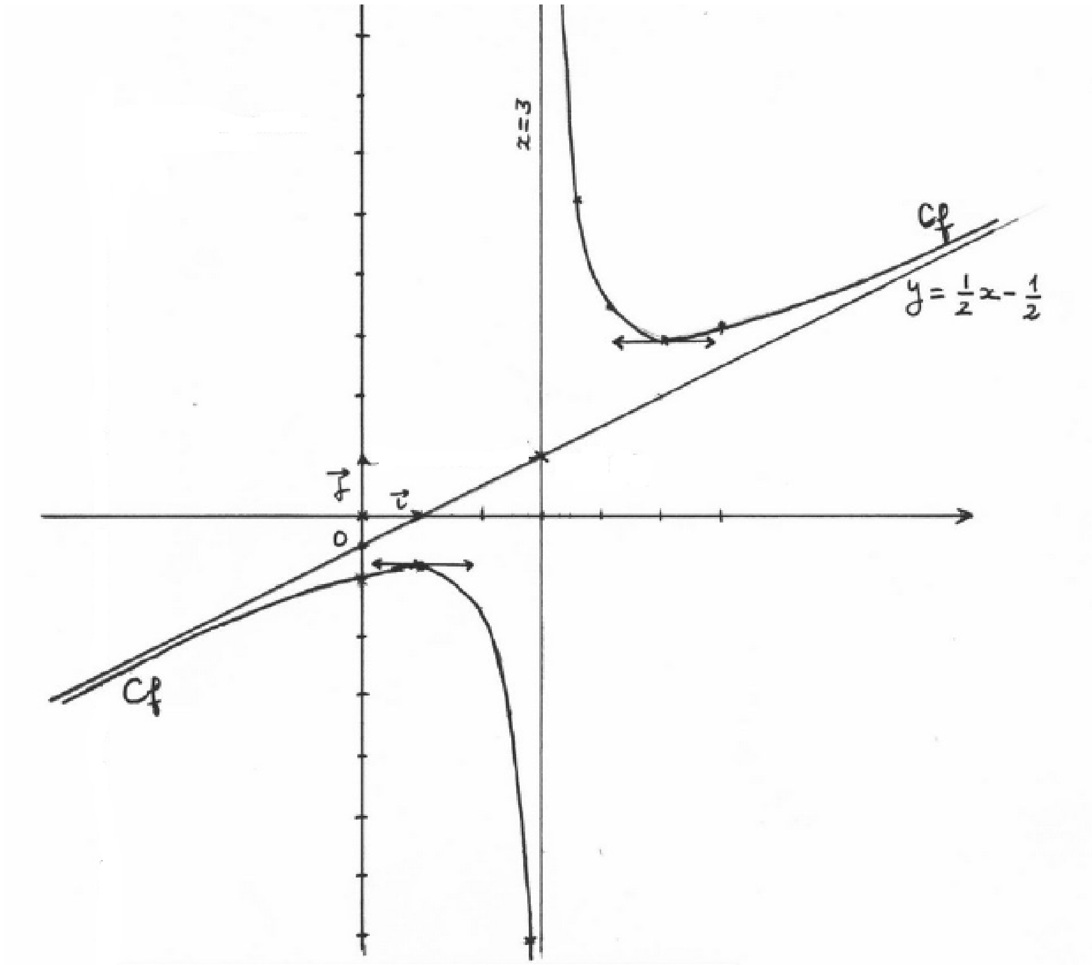
On en déduit que la droite d'équation $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de f.

De plus, d'après l'étude des limites aux bornes, on a

$$\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty,$$

donc la droite d'équation $x = 3$ est aussi une asymptote à la courbe.

Avec toutes ces informations, il est désormais possible de tracer le graphe de f (en commençant par tracer les droites asymptotes) :



2. Pour répondre à cette question, on s'aide essentiellement du graphe de f.

- Si $k \in \,]-1,3[$, alors k n'est pas un élément de l'image de f et l'équation $f(x)=k$ n'admet aucune solution.
- Si $k=-1$ ou $k=3$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution.
- Si $k \in]-\infty,-1[\cup]3,+\infty[$, l'équation $f(x)=k$ admet deux solutions.

Exercice 4 (Racines d'un polynôme)

1. Effectuons la division euclidienne de $x^4+4x^3+4x^2-3x-6$ par $x+2$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +4x^3 & +4x^2 & -3x & -6 & x+2 \\
\hline
-(x^4 & +2x^3) & & & & x^3+2x^2-3 \\
\hline
 & 2x^3 & +4x^2 & -3x & -6 & \\
 & -(2x^3 & +4x^2) & & & \\
\hline
 & & & -3x & -6 & \\
 & & & -(-3x & -6) & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

On obtient ainsi

$$\boxed{x^4+4x^3+4x^2-3x-6=(x+2)(x^3+2x^2-3)}$$

2. La factorisation précédente n'est pas une factorisation en produit de polynômes irréductibles : en effet, le polynôme Q défini par

$$Q(x)=x^3+2x^2-3$$

n'est ni de degré 1, ni de degré 2 avec un discriminant strictement négatif. Déterminons ainsi la factorisation en produit de polynômes irréductibles de Q. On remarque que $Q(1)=0$: cela va nous premettre d'effectuer la division euclidienne de Q par $(x-1)$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +2x^2 & & -3 & x-1 \\ \hline
-(x^3 & -x^2) & & & x^2+3x+3 \\ \cline{1-4}
 & 3x^2 & & -3 & \\
 & -(3x^2 & -3x) & & \\ \cline{1-4}
 & & 3x & -3 & \\
 & & -(3x & -3) & \\ \cline{1-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Ainsi, on a $Q(x)=(x-1)(x^2+3x+3)$. le polynôme du second degré x^2+3x+3 ayant un discriminant strictement négatif, il est irréductible. On en déduit que la décomposition de $x^4+4x^3+4x^2-3x-6$ en produit de polynômes irréductibles est

$$\boxed{x^4+4x^3+4x^2-3x-6=(x+2)(x-1)(x^2+3x+3)}$$

Exercice 5 (Arche du Gateway)

1. Soit $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}=\mathrm{ch}(x), \\ \mathrm{sh}(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\mathrm{sh}(x), \end{cases}$$

donc les fonctions ch et sh sont respectivement paires et impaires.

2. Soit $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} \mathrm{ch}'(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\mathrm{sh}(x), \\ \mathrm{sh}'(x)=\dfrac{e^{x}-(-e^{-x})}{2}=\mathrm{ch}(x). \end{cases}$$

Par ailleurs, on a

$$\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\left(\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}\right)-\left(\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}\right)=\frac{4}{4}=1.$$

3. L'aire comprise entre le sol et l'arche vaut

$$\int_{-96}^{96}G(x)\ \mathrm{d}x=\int_{-96}^{96}\left(-39\mathrm{ch}\left(\frac{x}{39}\right)+231\right)\ \mathrm{d}x=\left[-39\times 39\mathrm{sh}\left(\frac{x}{39}\right)+231x\right]_{-96}^{96}.$$

Après calculs, on trouve que l'aire vaut approximativement

$$\boxed{\int_{-96}^{96} G(x)\ \mathrm{d}x \cong 26651\ m^2}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $G'(x) = -\mathrm{sh}\left(\frac{x}{39}\right)$, donc $(G'(x))^2 = \mathrm{sh}^2\left(\frac{x}{39}\right)$ et

$$1 + (G'(x))^2 = 1 + \mathrm{sh}^2\left(\frac{x}{39}\right) = \mathrm{ch}^2\left(\frac{x}{39}\right).$$

On en déduit que

$$\sqrt{1 + (G'(x))^2} = \mathrm{ch}\left(\frac{x}{39}\right),$$

d'où

$$\mathcal{L} = \int_{-96}^{96} \sqrt{1 + (G'(x))^2}\ \mathrm{d}x = \int_{-96}^{96} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{39}\right)\ \mathrm{d}x = \left[39\mathrm{sh}\left(\frac{x}{39}\right)\right]_{-96}^{96} = 2 \times 39\mathrm{sh}\left(\frac{96}{39}\right).$$

Ainsi, on a

$$\boxed{\mathcal{L} \cong 453.86\ m}$$