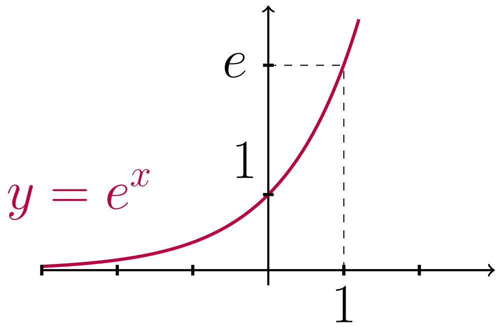
1 Introduction

1.1 Premier exemple historique

Il existe une unique fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant l'*équation différentielle* avec condition initiale :

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

On appelle cette fonction la *fonction exponentielle.*



On dit que la fonction exponentielle résout l'équation différentielle $y' = y$. C'est le premier exemple historique d'équation différentielle, dont une définition plus générale est proposée ci-dessous.

1.2 Équations différentielles : généralités

Définition (Équation différentielle) Une *équation différentielle* est une équation où l'inconnue est une fonction, et qui se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction et ses dérivées. Plus formellement, on appelle équation différentielle toute équation du type

$$\mathcal{F}\left(y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0,$$

d'inconnue la fonction y. On dit que n est l'*ordre* de l'équation différentielle.

Quelques remarques :

- "Résoudre" une équation différentielle, c'est rechercher les fonctions dérivables y satisfaisant la relation précédente.
- Dans une équation différentielle, on écrit souvent y au lieu de $y(x)$ (le "x" est implicite).

Exemples. Les équations différentielles suivantes sont d'ordre 1 :

$$\begin{cases} y' = y, \\ y' + 2y = 0, \\ x^2 y' + e^x y = 3, \end{cases}$$

celles-ci sont d'ordre 2 :

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 5 = 0, \\ 3y'' + 8y' + 7x = \cos(x). \end{cases}$$

Le but de ce cours consiste en la résolution d'une certaine classe d'équations différentielles d'ordre 1 et 2. Ces équations apparaissent naturellement dans la modélisation de phénomènes naturels (équations de Newton, curcuits RLC, dynamique de populations, cancérologie, ...) et il est (très) important de savoir comment résoudre ce type d'équation.

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

2.1 Position du problème

Définition (Équation différentielle linéaire d'ordre 1) On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 toute équation du type

$$(E): \quad y' = a(x)y + b(x),$$

où a et b sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I.
La fonction b est appelée *second membre* de l'équation.
On appelle équation homogène associée à (E) l'équation suivante :

$$(H): \quad y' = a(x)y,$$

aussi appelée *équation sans second membre.*

Exemple. L'équation

$$(E): \quad y' = 3xy + \operatorname{Arctan}(x)$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. L'équation homogène associée est

$$(H): \quad y' = 3xy.$$

De manière générale, afin de résoudre une équation du type $(E) : y' = a(x)y + b(x)$, on commence par résoudre l'équation homogène associée, à savoir $(H) : y' = a(x)y$.

2.2 Résolution de l'équation homogène $y' = a(x)y$

Proposition (Cas particulier où a est constant) Soit a un réel. Considérons l'équation différentielle :

$$(H): \quad y' = ay.$$

Les solutions de (H) sont les fonctions y_λ définies par

$$y_\lambda(x) = \lambda e^{ax},$$

où λ est une constante quelconque.

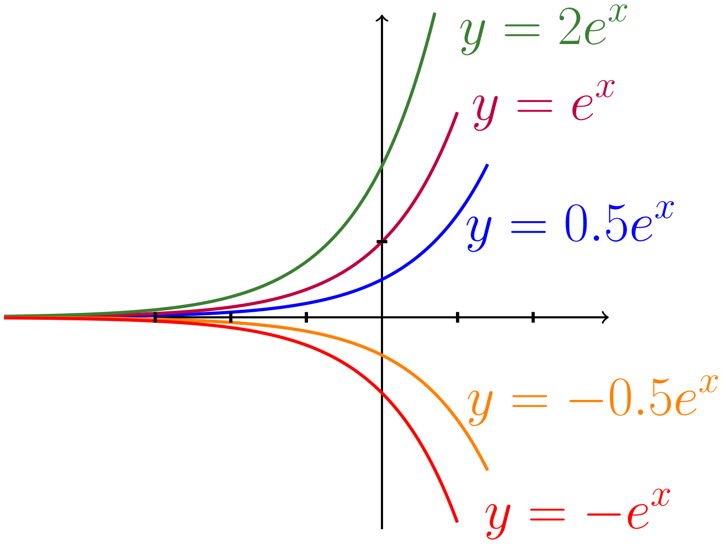
Exemple 1. Considérons l'équation différentielle

$$(H) : y' = y.$$

Les solutions de (H) sont les fonctions de la forme

$$y_\lambda(x) = \lambda e^x,$$

où λ est un réel quelconque.



Exemple 2. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(H) : -3y' = 5y.$$

Proposition (Solution générale de (H) : $y' = a(x)y$) Soit $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Considérons l'équation différentielle :

$$(H) : \quad y' = a(x)y.$$

Les solutions de (H) sont les fonctions y_λ définies par

$$y_\lambda(x) = \lambda e^{A(x)},$$

où A est une primitive de a.

Exemple. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(H) : y' = xy.$$

$\boxed{\clubsuit \textbf{ Faire l'exercice 1 } \clubsuit}$

2.3 Résolution de l'équation homogène $y' = a(x)y + b(x)$

Proposition (Cas particulier où a et b sont constants) Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$. Considérons l'équation différentielle :

$$(H): \quad y' = ay + b.$$

Les solutions de (H) sont les fonctions y_λ définies par

$$y_\lambda(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}.$$

Exemple. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E): \; y' = -3y + 5.$$

Proposition (Résolution de $y' = a(x)y + b(x)$) Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I. Considérons l'équation différentielle :

$$(E): \quad y' = a(x)y + b(x).$$

Les solutions de (E) sont les fonctions y_λ définies par

$$y_\lambda(x) = \lambda e^{A(x)} + y_p(x),$$

où A est une primitive de a et y_p est une solution particulière de (E).

À retenir :

Solution générale de l'équation complète (E)

$=$

Solutions de l'équation homogène (H)

$+$

Solution particulière de (E).

Ainsi, pour résoudre une équation différentielle du type

$$(E): \quad y' = a(x)y + b(x),$$

où a et b ne sont pas constants, on procède aux étapes suivantes :

1. On écrit l'équation homogène
$$(H): \quad y' = a(x)y.$$
2. On résout l'équation homogène.
3. On recherche **une** solution particulière de
$$(E): \quad y' = a(x)y + b(x).$$
4. Les solutions de (E) s'écrivent comme la somme des solutions de l'équation homogène et de la solution particulière.

Exemple. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E): \; xy' + y = 2x.$$

Lorsqu'une condition initiale est prescrite, le problème précédent possède une unique solution :

Théorème (Équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$, problème de Cauchy)
Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I.
Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le problème

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

possède une unique solution. Un tel problème est appelé *« problème de Cauchy »*, et la condition $y(x_0) = y_0$ est appelée la *condition initiale.*

Interprétation graphique : Pour tout point M de coordonnées (x_0, y_0) où $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction solution de (E) dont la courbe représentative passe par M.

♣ Faire l'exercice 2 ♣

3 Équations différentielles d'ordre un à variables séparables

Toutes les équations différentielles d'ordre 1 ne peuvent pas se mettre sous la forme $y' = a(x)y + b(x)$. Il existe cependant une autre classe d'équations différentielles d'ordre 1 que l'on sait résoudre, ces équations sont dites à *variables séparables* :

Définition (Équation différentielle d'ordre un à variables séparables)
Une *équation différentielle à variables séparables* est une équation différentielle qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$y'f(y) = g(x),$$

où f et g sont deux fonctions.

Remarque : le terme « *séparable* » provient du fait que l'on peut séparer les "variables y" d'un côté de l'équation, et les "variables x" de l'autre côté.

Pour résoudre une telle équation, on intègre des deux côtés de l'égalité :

Proposition (Résolution de $y'f(y) = g(x)$)
Considérons l'équation différentielle à variables séparables suivante :

$$y'f(y) = g(x).$$

Si F est une primitive de f et si G est une primitive de f, on a

$$F(y) = G(x) + K,$$

où K est un réel.

Exemple. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'y = x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

♣ Faire l'exercice 3 ♣