Exercice 1 (Équations différentielles homogènes)

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

(1.) $y' = 0$ **(2.)** $y' = 2y$ **(3.)** $-3y' = 12y$

(4.) $2y' = \sin(x)y$ **(5.)** $y' - x^5y = 0$ **(6.)** $(1+x)y' = y$

(7.) $y' = e^x y$ **(8.)** $-y' = \cos(3x)y$ **(9.)** $y' = \dfrac{y}{1+x^2}$

Exercice 2 (Équations différentielles avec second membre)

Résoudre les équations différentielles suivantes.

(1.) $\begin{cases} 3y' + y = 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$ **(2.)** $\begin{cases} 4y' + y = -1, \\ y(-1) = 1. \end{cases}$ **(3.)** $\begin{cases} -y' + 5y = -4, \\ y(1) = -3. \end{cases}$

(4.) $\begin{cases} y' + x^2y = x^2, \\ y(0) = 3. \end{cases}$ **(5.)** $\begin{cases} y' + y = x^3, \\ y(0) = 1. \end{cases}$ **(6.)** $\begin{cases} y' + 3y = 5 + e^{-x}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(7.) $\begin{cases} y' - 2y = \sin(x), \\ y(0) = 0. \end{cases}$ **(8.)** $\begin{cases} 3y' + y = e^{-x}\cos(x), \\ y(0) = 0. \end{cases}$ **(9.)** $\begin{cases} 3y' + y = x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

Exercice 3 (Équations différentielles à variables séparables)

Résoudre les équations différentielles à variables séparables suivantes :

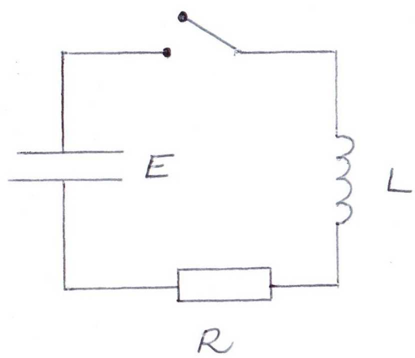
(1.) $\begin{cases} y'y = x^3, \\ y(0) = 2. \end{cases}$ **(2.)** $\begin{cases} y' + y^2 = 0, \\ y(0) = 3. \end{cases}$ **(3.)** $\begin{cases} y'e^y = x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(4.) $\begin{cases} y' = 1/y^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$ **(5.)** $\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$ **(6.)** $\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = -1. \end{cases}$

Exercice 4 (Mise en situation I)

Le circuit ci-contre comprend une bobine d'induction L, une résistance R. L'origine du temps est la fermeture du circuit. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, l'intensité I est nulle.
La force électromotrice aux bornes du circuit est constante et égale à E (en volts). On sait que la fonction $t \mapsto I(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$LI'(t) + RI(t) = E.$$



1.(a) Déterminer les solutions de l'équation différentielle précédente.
(b) Trouver la solution I telle que $I(0) = 0$.
2. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} I(t)$.

Exercice 5 (Mise en situation II)

Un modèle logistique de dynamique de population se présente sous la forme suivante : en notant $P(t)$ la densité d'individus au temps t, la fonction P est solution de l'équation différentielle suivante :

$$P'(t) = 0.5P(t)(1 - P(t)).$$

1. Soit y la fonction définie par $y(t) = 1/P(t)$. Vérifier que la fonction y est solution d'une équation différentielle du premier ordre, et résoudre cette équation.
2. En déduire une expression pour $P(t)$ (on supposera que $P(0) = 0.5$).

Ci-dessous l'interro 1 de l'an dernier :

1. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle suivante :
$$\begin{cases} y' = -2y + 3, \\ y(0) = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$
Préciser le temps T pour lequel $y(T) = 2$.
2. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle suivante :
$$\begin{cases} xy' + y = 2x, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$
3. Déterminer la solution de l'équation différentielle suivante :
$$\begin{cases} 4y' + y = 3e^{\frac{x}{2}} - 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$
On pourra rechercher une solution particulière y_p sous la forme $y_p(x) = Ae^{\frac{x}{2}} + B$, où A et B sont deux réels à déterminer.
4. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par
$$f(x) = x\ln(x) - x.$$
Que vaut la dérivée de f ? En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :
$$y' = \ln(x)y.$$

Ci-dessous quelques exercices donnés aux DS des années précédentes, **à maîtriser absolument**

EXERCICE TYPE EXAMEN (I)

Un individu travaillant dans une pièce où la température ambiante est de 30°C a beaucoup trop chaud : il met en route un climatiseur dans le but d'atteindre une température de 20°C. En notant y la température dans la pièce, on admet que la fonction y est solution de l'équation différentielle à coefficients constants :

$$\begin{cases} y' + y = 20, \\ y(0) = 30. \end{cases}$$

La température y est une variable du temps t que l'on exprime en heures - ainsi, la quantité $y(t)$ désigne la température de la pièce à l'instant t. Par exemple, au temps $t = 0$ (instant de mise en route du climatiseur), la température de la pièce vaut 30°C.

1. Résoudre l'équation différentielle précédente.

2. Vérifier que la fonction y est décroissante (cela signifie que la température décroît au cours du temps).

3. Que vaut la température de la pièce lorsque le temps est grand, *i.e.* que vaut

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) \ ?$$

4. Quel est l'instant T pour lequel la température de la pièce est égale à 25°C, *i.e.* quel est le temps T de sorte que $y(T) = 25$?

EXERCICE TYPE EXAMEN (II)

1. Déterminer la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} 4y' + y = 3e^{\frac{x}{2}} - 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

On pourra rechercher une solution particulière y_p du type $y_p(x) = Ae^{\frac{x}{2}} + B$.

2. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle suivante :

$$2y' + y = 34\cos(2t).$$

On pourra rechercher une solution particulière y_p du type $y_p(x) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$.

3. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y' - 2xy = 0.$$

EXERCICE TYPE EXAMEN (III)

Résoudre les deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} 2xy - 3y' = 2x^2 - 3, \\ y(0) = 3, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 4y' + y = \sin\left(\frac{x}{4}\right), \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Pour le second problème de Cauchy, on pourra rechercher une solution particulière y_p sous la forme

$$y_p(x) = A\cos\left(\frac{x}{4}\right) + B\sin\left(\frac{x}{4}\right),$$

où A et B sont deux réels à déterminer.