1 Préliminaires : rappels sur les racines d'un trinôme

Théorème (Racines d'un polynôme de degré 2) Soient a, b et c trois réels, avec $a \neq 0$. Considérons le polynôme P défini par

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$.

1er cas. Si $\Delta > 0$, le polynôme P possède deux racines réelles r_1 et r_2 données par

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2nd cas. Si $\Delta = 0$, le polynôme P possède une *racine double* r donnée par

$$r = -\frac{b}{2a}.$$

3ème cas. Si $\Delta < 0$, le polynôme P possède deux racines complexes conjuguées z_1 et z_2 données par

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple. Déterminer les racines des polynômes suivantes :

$$P_1 = X^2 - X - 3, \qquad P_2 = X^2 - 2\sqrt{5}X + 5, \qquad P_3 = X^2 + X + 1.$$

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

On s'intéresse dans la suite aux équations différentielles d'ordre 2 du type

$$(E): \quad ay'' + by' + cy = d(x),$$

où a, b, c sont trois réels et où d est une fonction. Afin de résoudre ce type d'équation, on procède comme dans le cas des équations différentielles d'ordre 1, *i.e.* on résout d'abord l'équation homogène

$$(H): \quad ay'' + by' + cy = 0,$$

et on cherche ensuite une solution particulière de

$$(E): \quad ay'' + by' + cy = d(x).$$

Les solutions de (E) seront la somme des solutions de (H) et d'une solution particulière de (E).

2.1 Résolution de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$.

Définition **(Équation caractéristique)** Soient a, b et c trois réels, avec $a \neq 0$. Considérons l'équation différentielle $(H): \ ay'' + by' + cy = 0$. On dit que

$$(C): \quad ar^2 + br + c = 0$$

est l'*équation caractéristique* associée à (H).

La résolution des équations différentielles du type $(H): \ ay'' + by' + cy = 0$ est étroitement liée à la recherche des racines de l'équation caractéristique associée, comme l'indique le théorème ci-dessous :

Théorème **(Équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$.)** Soient a, b et c trois réels, avec $a \neq 0$.
Considérons l'équation différentielle $(H): \ ay'' + by' + cy = 0$.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique $(C): \ ar^2 + br + c = 0$.

1er cas. Si $\Delta > 0$, l'équation (C) possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. La solution générale de (H) s'écrit

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ dans } \mathbb{R}.$$

2nd cas. Si $\Delta = 0$, l'équation (C) possède une racine double notée r. La solution générale de (H) s'écrit

$$y(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx}, \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ dans } \mathbb{R}.$$

3ème cas. Si $\Delta < 0$, le polynôme P possède deux racines complexes conjuguées z_1 et z_2. En notant $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \alpha - i\beta$, la solution générale de (H) s'écrit

$$y(x) = e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)), \quad \text{avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Exemple. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

et $\boxed{\clubsuit \textbf{ Faire l'exercice 1 } \clubsuit}$

2.2 Résolution de l'équation $ay'' + by' + cy = d(x)$.

Théorème (Équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$)
Soient a, b et c trois réels, avec $a \neq 0$. Soit $d : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
Considérons l'équation différentielle $(E) : \ ay'' + by' + cy = d(x)$, ainsi que l'*équation homogène associée :* $(H) : \ ay'' + by' + cy = 0$. Les solutions de (E) sont toutes les fonctions y de la forme

$$y = y_{\text{hom}} + y_{\text{part}},$$

où y_{hom} est une solution de l'équation homogène (H) et où y_{part} est une solution particulière de (E).

À retenir :

Solution générale de l'équation complète

$=$

Solutions de l'équation homogène

$+$

Solution particulière.

Pour les équations du second ordre, la recherche d'une solution particulière peut être très délicate. On se limitera aux cas où le second membre s'écrit comme le produit d'une exponentielle avec un polynôme :

Théorème (Équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$ - solution particulière)
Soient a, b et c trois réels, avec $a \neq 0$. Soit $d : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I, étant sous la forme

$$d(x) = e^{rx}P(x),$$

où r est un réel et P est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Pour rechercher une solution particulière de l'équation différentielle $(E) : ay'' + by' + cy = d(x)$, on distingue trois cas :

1er cas. Si r n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = e^{rx}Q(x), \quad \text{où } Q \text{ est un polynôme de degré } n,$$

2nd cas. Si r est une racine simple de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = xe^{rx}Q(x), \quad \text{où } Q \text{ est un polynôme de degré } n,$$

3ème cas. Si r est une racine double de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = x^2e^{rx}Q(x), \quad \text{où } Q \text{ est un polynôme de degré } n.$$

Exemple. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

A l'instar des équations différentielles d'ordre 1, lorsqu'une condition initiale est prescrite, le problème précédent possède une unique solution :

Théorème (Équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$, problème de Cauchy)
Soient a et b et c trois réels avec $a \neq 0$.
Soit $d : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I.
Soit $x_0 \in I$ et y_0, y_0' deux réels. Le problème

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = d(x), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

possède une unique solution. Un tel problème est appelé *« problème de Cauchy »*, et la condition $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0'$ est appelée la *condition initiale*.

Exemple. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + y = x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

♣ Faire l'exercice 2 ♣