Exercice 1 (Équations différentielles homogènes)

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes :

(1.) $y'' = 0$ **(2.)** $2y'' + y' - y = 0$ **(3.)** $y'' - 2y' + y = 0$

(4.) $y'' + y' + y = 0$ **(5.)** $y'' + 4y = 0$ **(6.)** $y'' - 4y = 0$

(7.) $y'' - y' + y = 0$ **(8.)** $y'' + y = 0$ **(9.)** $-3y'' + y' - 8y = 0$

Exercice 2 (Équations différentielles avec second membre)

Résoudre les équations différentielles suivantes. Lorsqu'une condition initiale est prescrite, déterminer l'unique solution de l'équation différentielle.

(1.) $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 6x + 4$ **(2.)** $y'' - 3y' = 2$

(3.) $y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$ **(4.)** $y'' + 2y' + y = 36xe^{-x}$

(5.) $\begin{cases} y'' + 4y' - 5y = 10, \\ y(0) = 4, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$ **(6.)** $\begin{cases} 2y'' - 5y' - 3y = -3x^2 - 10x + 4, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$

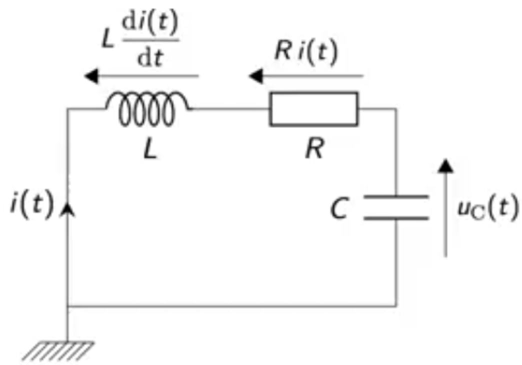
Exercice 3 (Etude d'un circuit RLC)

Dans le circuit RLC ci-contre, la tension u_C aux bornes du condensateur satisfait l'équation différentielle suivante :

$$LCu_C''(t) + RCu_C'(t) + u_C(t) = 0$$

(conséquence de la loi des mailles).

On suppose que $u_C(0) = 10$ et $u_C'(0) = 0$. Déterminer en fonction de R, L et C le comportement de la tension aux bordes du condensateur.

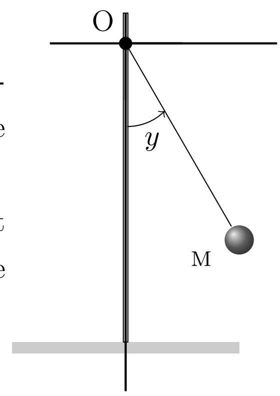


Ci-dessous quelques exos donnés aux DS de l'an dernier :

Exercice type DS I (Pendule pesant sans frottement) [sur 4 points]

On considère un pendule fixé au bout d'une tige rigide. Le pendule est assimilé à un point matériel M, et on s'intéresse au mouvement du pendule après l'avoir écarté légèrement de l'axe vertical.

On repère le pendule via l'angle y formé par l'axe vertical et la tige reliant l'origine du repère au pendule. On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, l'angle initial vaut $y(0) = 5^\circ$.



Sans tenir compte des frottements induits par la tige, le principe fondamental de la dynamique indique que l'angle y est solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + y = 0, \\ y(0) = 5, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

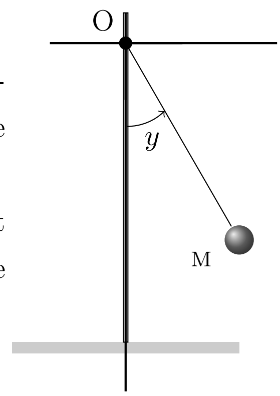
Déterminer l'évolution de l'angle y au cours du temps, *i.e.* résoudre l'équation différentielle ci-dessus.
Question subsidiaire : Le mouvement du pendule décrit par la solution y vous semble-t-il réaliste ?

Exercice type DS II (Équation différentielle d'ordre 2 avec second membre) [sur 4 points]
Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E): \quad y'' - 4y' + 4y = 3xe^{-2x}.$$

Exercice type DS III (Équation du pendule avec amortissement) [sur 4 points]

On considère un pendule fixé au bout d'une tige rigide. Le pendule est assimilé à un point matériel M, et on s'intéresse au mouvement du pendule après l'avoir écarté légèrement de l'axe vertical.
On repère le pendule via l'angle y formé par l'axe vertical et la tige reliant l'origine du repère au pendule. On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, l'angle initial vaut $y(0) = 3^\circ$.



En tenant compte des frottements dus à la tige, le principe fondamental de la dynamique indique que l'angle y est solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{2}y' + y = 0, \\ y(0) = 3, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Déterminer l'évolution de l'angle y au cours du temps, *i.e.* résoudre l'équation différentielle ci-dessus.