1 Fonctions de deux variables à valeurs réelles

1.1 Ensemble de définition

Définition (Fonction de deux variables) Une fonction f de deux variables est une application

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y). \end{array} \right.$$

On appelle *ensemble de définition*, et on note usuellement D_f, l'ensemble des points (x,y) pour lesquels $f(x,y)$ existe.

Exemple. Les fonctions

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2y + y^2\cos(x) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2-1} \end{array} \right.$$

sont des fonctions de deux variables. Quel est l'ensemble de définition de f ? Celui de g ?

1.2 Dérivées partielles premières

Définition (Dérivées partielles premières) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

- On appelle *dérivée partielle première par rapport à x*, et on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, la fonction obtenue à partir de f en dérivant $f(x,y)$ par rapport à x et en considérant y comme étant constant.
- On appelle *dérivée partielle première par rapport à y*, et on note $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, la fonction obtenue à partir de f en dérivant $f(x,y)$ par rapport à y et en considérant x comme étant constant.

Exemple. Revenons à la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2y + y^2\cos(x). \end{array} \right.$$

Calculer les premières dérivées partielles de f.

1.3 Dérivées partielles secondes

Définition (Dérivées partielles secondes) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

- On appelle *dérivée partielle seconde par rapport à x*, et on note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, la fonction obtenue à partir de f en dérivant deux fois $f(x,y)$ par rapport à x et en considérant y comme étant constant.
- On appelle *dérivée partielle seconde par rapport à y*, et on note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, la fonction obtenue à partir de f en dérivant deux fois $f(x,y)$ par rapport à y et en considérant x comme étant constant.
- Si on dérive une fois f par rapport à x et si on dérive à nouveau le résultat par rapport à y, on obtient une *dérivée partielle seconde croisée* que l'on note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
- Si on dérive une fois f par rapport à y et si on dérive à nouveau le résultat par rapport à x, on obtient une *dérivée partielle seconde croisée* que l'on note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Exemple. Si

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 y + y^2 \cos(x), \end{array} \right.$$

calculer en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ les quantités $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.

Le théorème de Schwarz, énoncé ci-dessous, assure que les dérivées partielles croisées sont toujours égales :

Théorème (Théorème de Schwarz)
Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables "suffisamment lisse", alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

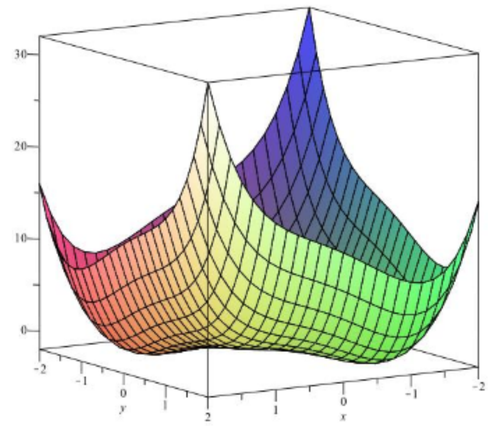
♣ Faire l'exercice 1 ♣

2 Recherche d'extremums de fonctions de deux variables

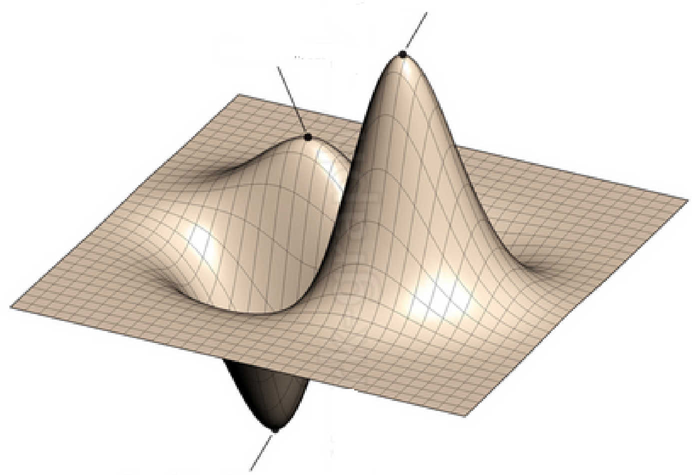
On s'intéresse dans la suite aux surfaces d'équation

$$z = f(x, y),$$

c'est à dire aux ensembles de points $M(x, y, z)$ de l'espace ayant pour coordonnées $(x, y, f(x, y))$. Voici par exemple la surface d'équation $z = f(x, y)$, où $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$:



Certaines de ces surfaces possèdent un point de plus haute altitude, appelé *maximum global*. Les points de plus petite altitude sont appelées *minimums globaux*. Les points étant *localement* des points de plus haute altitude sont appelés *maximums locaux*. Enfin, les points étant *localement* des points de plus petite altitude sont appelés *minimums locaux*.



Le but de ce paragraphe est de donner une méthode permettant de détecter la localisation des minimums et maximums locaux d'une surface décrite par l'équation $z = f(x, y)$.

2.1 Points critiques

Définition (Point critique) Soit

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y). \end{array} \right.$$

une fonction de deux variables. On appelle *point critique* de f tout point M de coordonnées (a,b) vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0.$$

Exemple. Déterminer les points critiques de

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + y^2. \end{array} \right.$$

Le théorème ci-après indique que les extremums locaux d'une fonction de deux variables sont à rechercher parmi les points critiques de cette fonction.

2.2 Théorème principal

Théorème (Extremums locaux)

Soit

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y). \end{array} \right.$$

une fonction de deux variables. Soit M un **point critique** de f, de coordonnées (a,b). Notons

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b).$$

1er cas. Si $rt - s^2 < 0$, alors la fonction f n'admet pas d'extremum en M.

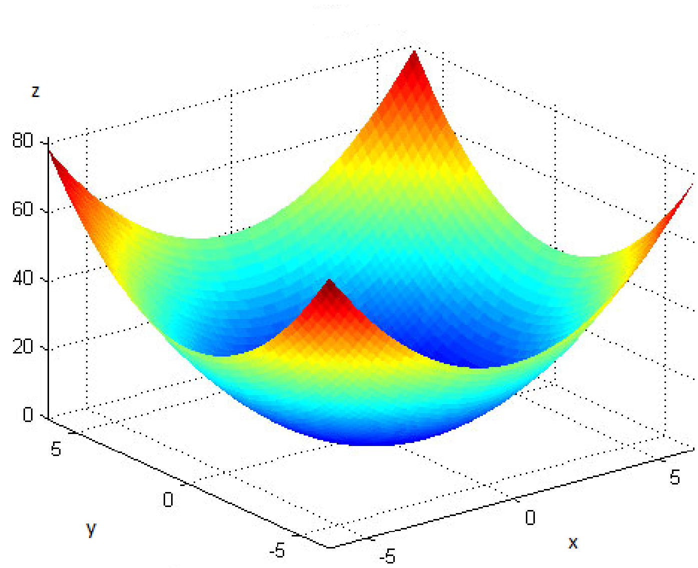
2nd cas. Si $\begin{cases} rt - s^2 > 0 \\ r > 0 \end{cases}$, alors le point M est un <u>minimum local</u> pour la fonction f.

3ème cas. Si $\begin{cases} rt - s^2 > 0 \\ r < 0 \end{cases}$, alors le point M est un <u>maximum local</u> pour la fonction f.

4ème cas. Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.

Exemple. Déterminer le point critique de la fonction f suivante, et préciser s'il s'agit d'un extremum :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + y^2. \end{array} \right.$$



♣ **Faire l'exercice 2** ♣