**Exercice 1 (Ensembles de définition et dérivées partielles)**

Pour chacune des trois fonctions suivantes :

- Déterminer son ensemble de définition,
- Calculer les dérivées partielles premières et secondes,
- Vérifier que le théorème de Schwarz est validé.

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 3x^3 + y^2x^2 + y \end{array} \right. \qquad g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \cos(x^2y) + x\ln(y) \end{array} \right.$$

$$h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x^3}{y} \end{array} \right.$$

**Exercice 2 (Recherche d'extremums)**

Déterminer les points critiques des fonctions suivantes, et préciser s'il s'agit de minimums ou maximums locaux pour ces fonctions.

**1.** $f(x,y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$.
**2.** $f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$
**3.** $f(x,y) = x^2 - \dfrac{x^4}{2} - y^2$
**4.** $f(x,y) = x^2 - y^2$
**5.** $f(x,y) = e^{xy}(xy - 1) + y(y - 4)$

**Exercice 3 (Optimisation)**

Une entreprise de restauration souhaite ouvrir $x$ restaurants et $y$ bars. Une étude a estimé le bénéfice annuel en euros, noté $f(x,y)$, dégagé par l'exploitation de ces restaurants et de ces bars. Cette estimation a donné l'expression suivante du bénéfice annuel :

$$f(x,y) = -50x^4 - 200y^4 + 675000x + 21600y - 300000.$$

Déterminer le nombre de restaurants et de bars à ouvrir pour obtenir le bénéfice maximum.

Ci-dessous quelques exos donnés aux DS de l'an dernier :

**Exercice type DS I (Fonctions de deux variables)**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y) = x^2 - 5x^2y + 5y^3 + y\sin(x).$$

Calculer les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

En déduire la valeur de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ sans calcul supplémentaire.

**Exercice type DS II (Extremums locaux)**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y) = 2x^2 + 5y^2 + 4xy + 2x + 4y + 1.$$

**1.** Calculer les dérivées partielles premières, à savoir $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

**2.** Montrer que la fonction $f$ possède un unique point critique.

**3.** Ce point critique est-il un minimum local ou un maximum local ?