

Exercice 1 (Cours) [5 points]

Rappeler la définition de la fonction Arcsin (en précisant l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée), et tracer son graphe. Que vaut $\text{Arcsin}'(x)$ pour $x \in]-1, 1[$?

Exercice 2 (Résolution d'une équation) [5 points]

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$3 \cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{6}$$

On pourra commencer par mettre la quantité $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x$ sous la forme $\sqrt{A^2 + B^2} \cos(x - \varphi)$.

Exercice 3 (Étude d'une fonction trigonométrique) [10 points]

Considérons la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par

$$f(x) = \text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(-x).$$

- 1.(a) Montrer que f est paire.
- 1.(b) Calculer $f(x)$ pour $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = 1$.
- 1.(c) Conjecturer la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

On se propose de démontrer cette conjecture, sans utiliser la dérivation. Dans toute la suite, on fixe un réel $x \in [-1, 1]$.

- 2.(a) En utilisant une formule d'addition, vérifier que l'on a

$$\cos(f(x)) = \cos(\text{Arccos}(x)) \cos(\text{Arccos}(-x)) - \sin(\text{Arccos}(x)) \sin(\text{Arccos}(-x)).$$

- 2.(b) Que vaut la quantité $\cos(\text{Arccos}(x))$?
- 2.(c) En utilisant l'égalité

$$\cos^2(\text{Arccos}(x)) + \sin^2(\text{Arccos}(x)) = 1,$$

montrer que

$$\sin(\text{Arccos } x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

- 2.(d) Montrer, grâce aux questions précédentes, que

$$\cos(f(x)) = -1.$$

- 2.(e) En déduire que

$$f(x) = \pi.$$

3. **[Bonus]** Qu'en déduire pour la courbe représentative de Arccos ?