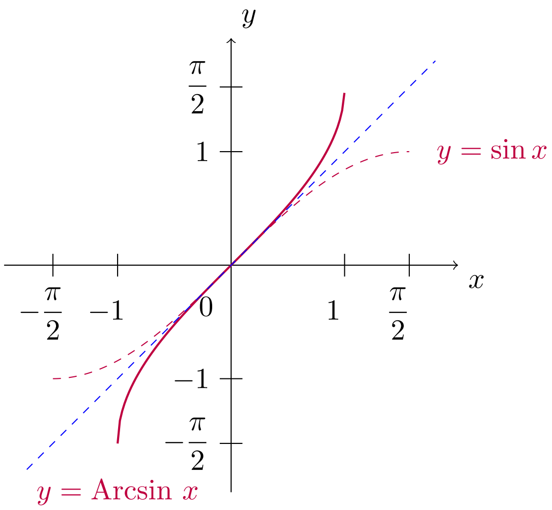
Exercice 1 (Cours)

La fonction sinus restreinte à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, en tant que fonction continue et strictement croissante, réalise une bijection de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. On appelle *fonction arcsinus*, et on note Arcsin, la bijection réciproque de $\sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$. La fonction Arcsin est définie sur $[-1, 1]$ à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur l'intervalle $]-1, 1[$ et pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



Exercice 2 (Résolution d'une équation)

L'équation étudiée équivaut à

$$2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) = \sqrt{6},$$

soit

$$2\sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6},$$

ou encore

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Ainsi, il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Autrement dit, il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi.$$

Exercice 3 (Étude d'une fonction trigonométrique)

1.(a) L'intervalle $[-1,1]$ est centré en 0 et pour tout $x \in [-1,1]$, on a

$$\begin{aligned} f(-x) &= \text{Arccos}(-x) + \text{Arccos}(-(-x)) \\ &= \text{Arccos}(-x) + \text{Arccos}(x) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

donc f est paire.

1.(b) On a

$$\begin{cases} f(0) = 2\text{Arccos}(0) = 2 \times \dfrac{\pi}{2} = \pi, \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \text{Arccos}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \text{Arccos}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3} = \pi, \\ f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \text{Arccos}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \text{Arccos}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} = \pi, \\ f(1) = \text{Arccos}\,(1) + \text{Arccos}\,(-1) = 0 + \pi = \pi. \end{cases}$$

1.(c) **Conjecture :** pour tout $x \in [-1,1]$, on a $f(x) = \pi$.

2.(a) En utilisant la formule

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

et en remplaçant a par $\text{Arccos}(x)$ et b par $\text{Arccos}(-x)$, on obtient le résultat.

2.(b) Par définition, on a $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$.

2.(c) Ayant $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$ et $\cos^2(\text{Arccos}(x)) + \sin^2(\text{Arccos}(x)) = 1$, on obtient

$$x^2 + \sin^2(\text{Arccos}(x)) = 1,$$

d'où

$$\sin(\text{Arccos}\ x) = \sqrt{1-x^2},$$

en remarquant que $\sin(\text{Arccos}(x)) \geqslant 0$ ayant $\text{Arccos}(x) \in [0,\pi]$.

2.(d) Rappelons que

$$\cos(f(x)) = \cos(\text{Arccos}(x))\cos(\text{Arccos}(-x)) - \sin(\text{Arccos}(x))\sin(\text{Arccos}(-x)).$$

D'après 2.(a) et 2.(b), on en déduit que

$$\begin{aligned} \cos(f(x)) &= x \times (-x) - \sqrt{1-x^2} \times \sqrt{1-(-x)^2} \\ &= -x^2 - (1-x^2) \\ &= -1. \end{aligned}$$

2.(e) Ayant $f(x) \in [0, 2\pi]$ et $\cos(f(x)) = -1$, on en déduit que $f(x) = \pi$.

3. Pour tout $x \in [-1,1]$, on a $f(x) = \text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(-x) = \pi$. On en déduit que la courbe représentative de la fonction Arccos possède un centre de symétrie situé au point S de coordonnées $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.