Nom :

Prénom :

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction *cosinus hyperbolique*, notée ch, par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

[2 pts]

1. Domaine d'étude

Montrer que la fonction ch est paire. Qu'en déduire sur le domaine d'étude de cette fonction ?

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = ch(x)$, donc la fonction ch est paire. On se contente de l'étudier sur $[0, +\infty[$, le graphe de ch étant symétrique par rapport à (Oy).

$\boxed{\text{Dans toute la suite, on étudie cette fonction sur } D_e = [0, +\infty[}$

[2 pts]

2. Comportement asymptotique

(a) Déterminer les limites aux bornes de D_e (il y en a deux à calculer).

* en 0 : on a $ch(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$, donc $\boxed{\lim_{x \to 0} ch(x) = 1}$

* en $+\infty$: ayant $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{2} = 0$, on obtient par somme : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} ch(x) = +\infty}$

[2pts]

(b) Montrer que : $\lim_{x \to +\infty} \left(\mathrm{ch}(x) - \frac{e^x}{2} \right) = 0$.

$\boxed{\text{On dit que la courbe d'équation } y = \frac{e^x}{2} \text{ est une courbe asymptote à la fonction ch en } +\infty}$

Soit $x \geq 0$. On a : $ch(x) - \frac{e^x}{2} = \cancel{\frac{e^x}{2}} + \frac{e^{-x}}{2} - \cancel{\frac{e^x}{2}} = \frac{e^{-x}}{2}$.

Puisque $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{2} = 0$, on a bien :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(ch(x) - \frac{e^x}{2} \right) = 0}$$

[3 pts]

3. Étude des variations

(a) Calculer la dérivée de la fonction ch. En déduire que la fonction ch est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{ch'(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}}$

Or, $ch'(x) > 0 \iff e^{x} > e^{-x} \iff x > -x \iff 2x > 0 \iff x > 0$.

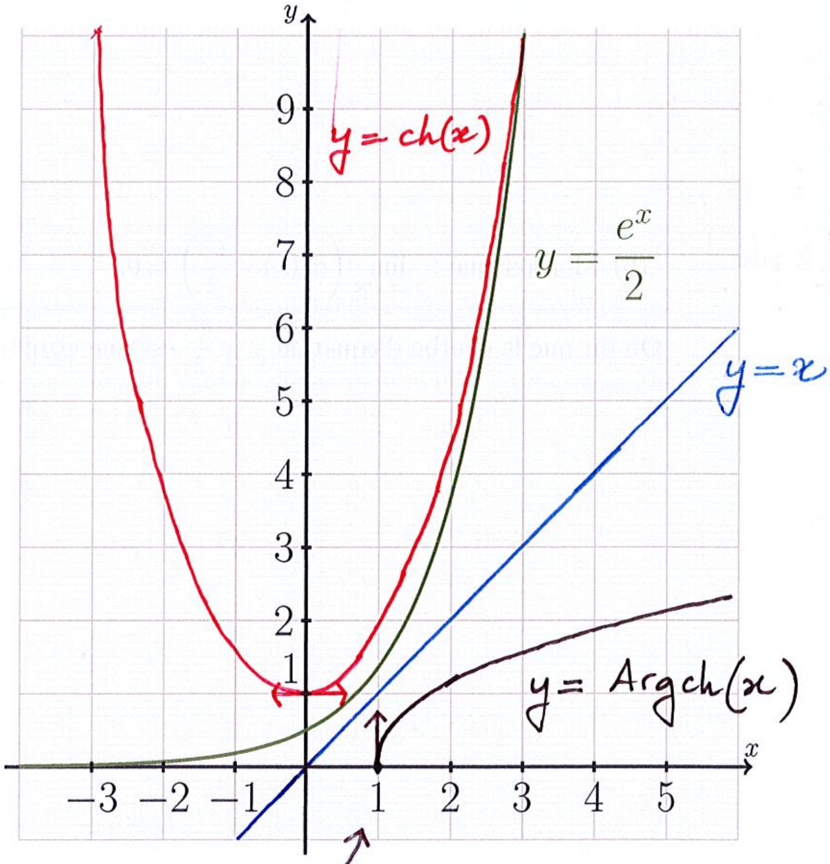
« passage au ln »

On a donc $\begin{cases} ch'(0) = 0 \\ ch'(x) > 0 \text{ si } x > 0 \end{cases}$, donc la fonction ch est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

[3 pts]

(b) Compléter le tableau de variations suivant, et tracer le graphe complet de la fonction ch dans le quadrillage ci-après (la **courbe asymptote en** $+\infty$ d'équation $y = \dfrac{e^x}{2}$ est déjà tracée).

x	0	$+\infty$
$ch'(x)$	0	$+$
$ch(x)$	1 ↗	$+\infty$



la tangente est verticale en 1 : la fonction Argch n'est pas dérivable en ce point.

4. Étude de la bijection réciproque

[1 pt]

(a) Donner, sans justification, l'image de la fonction ch.

$$\mathrm{Im}(\mathrm{ch}) = [1, +\infty[$$

[2 pts]

(b) Justifier que la fonction ch réalise une bijection de $I = [0, +\infty[$ vers $J = [1, +\infty[$.

La fonction ch est continue et strictement croissante sur $I = [0, +\infty[$, elle est ainsi bijective de I vers $\mathrm{ch}(I) = [1, +\infty[= J$.

On note Argch : $[1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de la fonction ch sur $[0, +\infty[$

[2 pts]

(c) Tracer l'allure du graphe de la fonction Argch (dans le quadrillage page 2).

[2 pts]

(d) En utilisant le théorème de dérivation d'une bijection réciproque, montrer que la fonction Argch n'est pas dérivable en 1.

Puisque $\mathrm{ch}'(0) = 0$, la fonction Argch n'est pas dérivable en $\mathrm{ch}(0) = 1$ (ce qui « se voit » sur le graphe)

[4 pts]

(e) Montrer que, pour tout $y \geqslant 1$, on a

$$\mathrm{Argch}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

On pourra poser $X = e^x$ pour résoudre une équation du second degré en X.

Soit $y \geq 1$, on cherche l'unique élément $x \geq 0$ tel que $y = \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, soit : $e^x + e^{-x} = 2y$.

En posant $X = e^x$, l'équation devient : $X + \dfrac{1}{X} = 2y$, et en multipliant par X : $\boxed{X^2 - 2yX + 1 = 0}$

Le discriminant Δ associé à cette équation est $\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2 - 1)$, et l'équation possède deux solutions : $X_1 = y - \sqrt{y^2-1}$ et $X_2 = y + \sqrt{y^2 - 1}$, ce qui donne : $x_1 = \ln(y - \sqrt{y^2-1})$ ou $x_2 = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$.

Dès lors que $y \geq 1$, on peut vérifier que $x_1 \leq 0$; la solution dans $I = [0, +\infty[$ est donc $x_2 = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$,

ce qui donne : $\boxed{\mathrm{Argch}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1})}$