Nom :

Prénom :

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction *cosinus hyperbolique*, notée ch, par

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1. Domaine d'étude

Montrer que la fonction ch est paire. Qu'en déduire sur le domaine d'étude de cette fonction ?

Dans toute la suite, on étudie cette fonction sur $D_e = [0, +\infty[$

2. Comportement asymptotique

(a) Déterminer les limites aux bornes de D_e (il y en a deux à calculer).

(b) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\text{ch}(x) - \frac{e^x}{2} \right) = 0$.

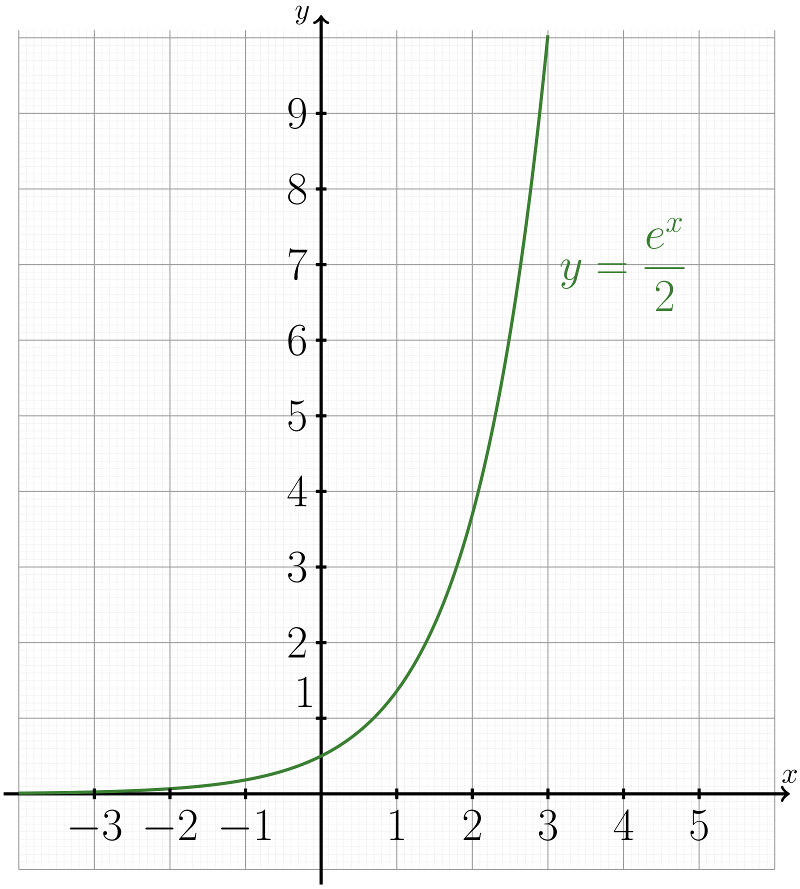
On dit que la courbe d'équation $y = \frac{e^x}{2}$ est une **courbe asymptote** à la fonction ch en $+\infty$

3. Étude des variations

(a) Calculer la dérivée de la fonction ch. En déduire que la fonction ch est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

(b) Compléter le tableau de variations suivant, et tracer le graphe complet de la fonction ch dans le quadrillage ci-après (la **courbe asymptote en $+\infty$** d'équation $y = \frac{e^x}{2}$ est déjà tracée).

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$	
$\mathrm{ch}(x)$	



4. Étude de la bijection réciproque

(a) Donner, sans justification, l'image de la fonction ch.

(b) Justifier que la fonction ch réalise une bijection de $I = [0, +\infty[$ vers $J = [1, +\infty[$.

On note $\text{Argch} : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de la fonction ch sur $[0, +\infty[$

(c) Tracer l'allure du graphe de la fonction Argch (dans le quadrillage page 2).

(d) En utilisant le théorème de dérivation d'une bijection réciproque, montrer que la fonction Argch n'est pas dérivable en 1.

(e) Montrer que, pour tout $y \geqslant 1$, on a

$$\text{Argch}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right).$$

On pourra poser $X = e^x$ pour résoudre une équation du second degré en X.