Exercice 1 (Racines d'un polynôme)

1. On a

$$\begin{aligned} P(-2) &= (-2)^3 + (-2)^2 + 3 \times (-2) + 10 \\ &= -8 + 4 - 6 + 10 \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc -2 est bien une racine de P.

2. Effectuons la division euclidienne de P par $x+2$:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +x^2 & +3x & +10 & x+2 \\ \cline{5-5} -(x^3 & +2x^2) & & & x^2-x+5 \\ \cline{1-4} & -x^2 & +3x & +10 & \\ & -(-x^2 & -2x) & & \\ \cline{2-4} & & 5x & +10 & \\ & & -(5x & +10) & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

On en déduit que

$$\boxed{P(x) = (x+2)(x^2-x+5)}$$

Le polynôme $x^2 - x + 5$ ayant un discriminant strictement négatif, il n'admet pas de racine réelle. Ainsi, l'équation $P(x) = 0$ a pour seule solution réelle $x = -2$.

Exercice 2 (Une fraction rationnelle)

1. Effectuons la division euclidienne de $2x^2 - 6x + 7$ par $2x - 1$:

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^2 & -6x & +7 & 2x-1 \\ \cline{4-4} -(2x^2 & -x) & & x-5/2 \\ \cline{1-3} & -5x & +7 & \\ & -(-5x & +5/2) & \\ \cline{1-3} & & \mathbf{9/2} & \end{array}$$

On a donc

$$\boxed{2x^2 - 6x + 7 = (2x-1)\left(x - \frac{5}{2}\right) + \frac{9}{2}}$$

Ayant

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 7}{2x - 1},$$

on en déduit que

$$\boxed{f(x) = x - \frac{5}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2x-1}}$$

2. On a

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 f(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_1^3 \left(x - \frac{5}{2} + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}\right)\ \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{5}{2}x + \frac{9}{4}\ln(|2x-1|)\right]_1^3 \\ &= \left(\frac{9}{2} - \frac{15}{2} + \frac{9}{4}\ln(5)\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{S = \frac{9}{4}\ln(5) - 1}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \int_1^3 xf(x)\ \mathrm{d}x &= \int_1^3 \left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{9}{2}\cdot\frac{x}{2x-1}\right)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_1^3 \left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{9}{4}\cdot\frac{2x}{2x-1}\right)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_1^3 \left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{9}{4}\cdot\frac{2x\mathbf{-1+1}}{2x-1}\right)\ \mathrm{d}x \\ &= \int_1^3 \left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{9}{4}\cdot\left(1 + \frac{1}{2x-1}\right)\right)\ \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{4}x^2 + \frac{9}{4}\left(x + \frac{1}{2}\ln(|2x-1|)\right)\right]_1^3 \\ &= \left(9 - \frac{45}{4} + \frac{9}{4}\left(3 + \frac{1}{2}\ln(5)\right)\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}\right) \quad = \frac{9}{8}\ln(5) + \frac{19}{6}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{x_G = \frac{\frac{9}{8}\ln(5) + \frac{19}{6}}{\frac{9}{4}\ln(5) - 1}}$$

Exercice 3 (Calcul d'intégrales)

On a

$$I_1 = \int_0^1 x^5 e^{x^6}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{e^{x^6}}{6}\right]_0^1,$$

d'où

$$\boxed{I_1 = \frac{e-1}{6}}$$

On a

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + x\sin x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin x\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{6} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin x\ \mathrm{d}x.$$

Pour calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin x \, \mathrm{d}x$, on effectue une intégration par parties en posant $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$. On obtient $u'(x) = 1$, $v(x) = -\cos(x)$ et la formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin x \, \mathrm{d}x &= [-x\cos x]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{6}} (-\cos(x)) \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}\pi}{12} + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\boxed{I_2 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}\pi}{12} + \frac{1}{2}}$$

Pour calculer $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \ln(x) \, \mathrm{d}x$, on effectue une intégration par parties en posant $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$. On obtient $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, $v(x) = x$ et la formule d'intégration par parties donne

$$I_3 = [x\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 x \times \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = 2\ln(2) - \int_1^2 \, \mathrm{d}x,$$

d'où

$$\boxed{I_3 = 2\ln(2) - 1}$$

Pour calculer $I_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan(x) \, \mathrm{d}x$, on constate que

$$I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{-\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x,$$

d'où

$$I_4 = -\left[\ln(|\cos x|)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{I_4 = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$