

Exercice 1 (Racines d'un polynôme) [4 points]

Considérons le polynôme P défini par

$$P(x) = x^3 + x^2 + 3x + 10$$

1. Montrer que $\lambda = -2$ est une racine de P .
2. En effectuant une division euclidienne, factoriser P par $(x + 2)$. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(x) = 0$ dans \mathbb{R} .

Exercice 2 (Une fraction rationnelle, d'après le DS 2015) [8 points]

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 7}{2x - 1}.$$

1. Montrer qu'il existe trois réels A, B et C tels que

$$f(x) = Ax + B + \frac{C}{2x - 1}.$$

(Pour trouver les réels A, B , et C , on pourra effectuer la division euclidienne de $2x^2 - 6x + 7$ par $2x - 1$, ou bien procéder par identification).

2. Calculer

$$S = \int_1^3 f(x) \, dx,$$

ainsi que

$$x_G = \frac{1}{S} \int_1^3 x f(x) \, dx.$$

Exercice 3 (Calcul d'intégrales) [8 points]

Calculer la valeur des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 x^5 e^{x^6} \, dx, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + x \sin x) \, dx,$$

$$I_3 = \int_1^2 \ln(x) \, dx \quad \text{et} \quad I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan(x) \, dx.$$