Nom :

Prénom :

Groupe :

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{2}{x-3}.$$

1. **Domaine de définition et domaine d'étude**

   (a) Déterminer le domaine de définition de f (noté D_f). (1 pt)

   On a $D_f = \{x \in \mathbb{R},\ x-3 \neq 0\}$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

   (b) Sur quel domaine d'étude D_e étudie-t-on cette fonction ? (1 pt)

   La fonction f n'étant ni paire ni impaire, on étudie f sur $D_e = D_f$ tout entier.

2. **Comportement asymptotique**

   (a) Déterminer les limites aux bornes de D_f (il y en a quatre à calculer). (4×0.5 pt)
   En déduire l'existence d'une asymptote verticale à la courbe. (1 pt)

   - en $+\infty$: on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x-3} = 0$
   - en $-\infty$: on a $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x-3} = 0$
   - en 3^- : on a $\lim\limits_{x \to 3^-} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = 1^-$ et $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{2}{x-3} = -\infty$
   - en 3^+ : on a $\lim\limits_{x \to 3^+} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = 1^+$ et $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{2}{x-3} = +\infty$

   Par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

   $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

   et la droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale

   (b) Montrer que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à la courbe. (1 pt)

   Soit $x \in D_f$, on a $f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{x-3}$, donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x-3} = 0$ et la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique.

3. **Étude des variations**

(a) Calculer la dérivée de f sous forme factorisée. (3 pts)

Soit $x \in D_f$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(x-3)^2}$$

on met tout au même dénominateur.

$$= \frac{(x-3)^2 - 4}{2(x-3)^2}$$

identité remarquable "$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$"

Beaucoup plus rapide que de developper et calculer Δ.

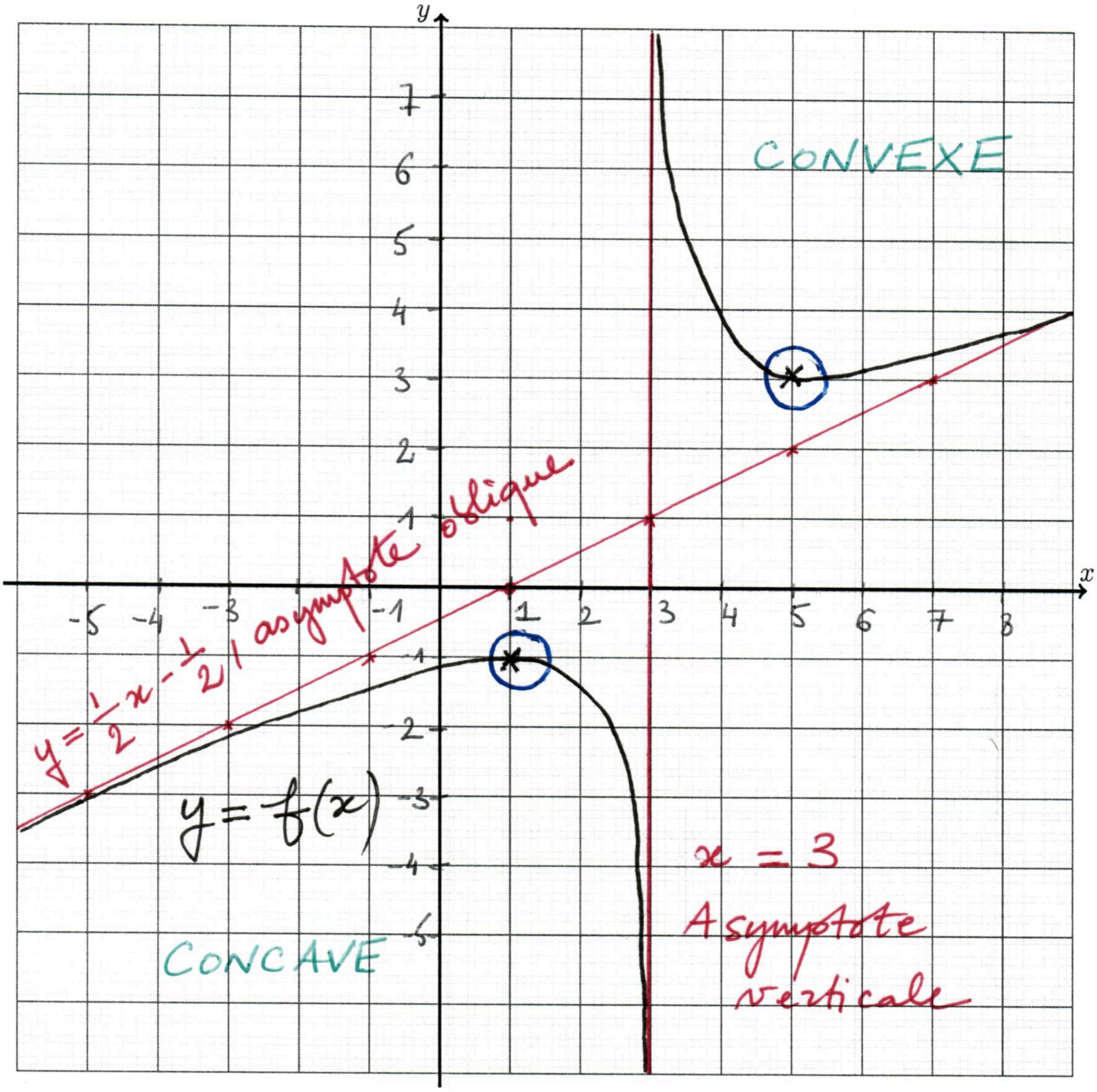
$$= \frac{(x-5)(x-1)}{2(x-3)^2}$$

(b) Compléter le tableau de variations suivant : (3pts)

x		1		3		5	
$f'(x)$	+	0	−	||	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	3	↗ $+\infty$

4. Tracé du graphe (4 pts)

Tracer le graphe de f dans le quadrillage ci-dessous (on commencera par tracer les asymptotes !)



5. Répondre aux questions suivantes sans justification

(a) Donner un intervalle sur lequel la fonction f est concave. (2 pts)

La fonction f est concave sur $]-\infty, 3[$

(b) Préciser sur le graphe de f la position des extremums locaux. (2 pts)

Ils sont entourés en bleu sur le graphe.

(c) Déterminer Im(f), l'image de f (c'est à dire l'ensemble des valeurs prises par f). (2pts)

$Im(f) =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$

Nom :

Prénom :

Groupe :

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x+1}$$

1. Domaine de définition et domaine d'étude

(a) Déterminer le domaine de définition de f (noté D_f). (1 pt)

On a $D_f = \{x \in \mathbb{R},\ x+1 \neq 0\}$ donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(b) Sur quel domaine d'étude D_e étudie-t-on cette fonction ? (1 pt)

La fonction f n'étant ni paire ni impaire, on étudie f sur $D_e = D_f$ tout entier.

2. Comportement asymptotique

(a) Déterminer les limites aux bornes de D_f (il y en a quatre à calculer). (4×0,5)
En déduire l'existence d'une asymptote verticale à la courbe. (1 pt)

- en $+\infty$: on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x+1} = 0$
- en $-\infty$: on a $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x+1} = 0$

en -1^- : on a $\lim\limits_{x \to -1^-} \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 1^-$ et $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{2}{x+1} = -\infty$

en -1^+ : on a $\lim\limits_{x \to -1^+} \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 1^+$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{2}{x+1} = +\infty$

Par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

et la droite d'équation $x = -1$ et asymptote verticale

(b) Montrer que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ est asymptote oblique à la courbe. (1 pt)

Soit $x \in D_f$, on a $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) = \frac{2}{x+1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ est asymptote oblique.

3. Étude des variations

(a) Calculer la dérivée de f sous forme factorisée. (3 pts)

Soit $x \in \mathcal{D}_f$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

on met tout au même denominateur.

$$= \frac{(x+1)^2 - 4}{2(x+1)^2}$$

identité remarquable.

$$\underbrace{\text{“}a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)\text{”}}_{\text{beaucoup plus rapide que de developper et calculer } \Delta}$$

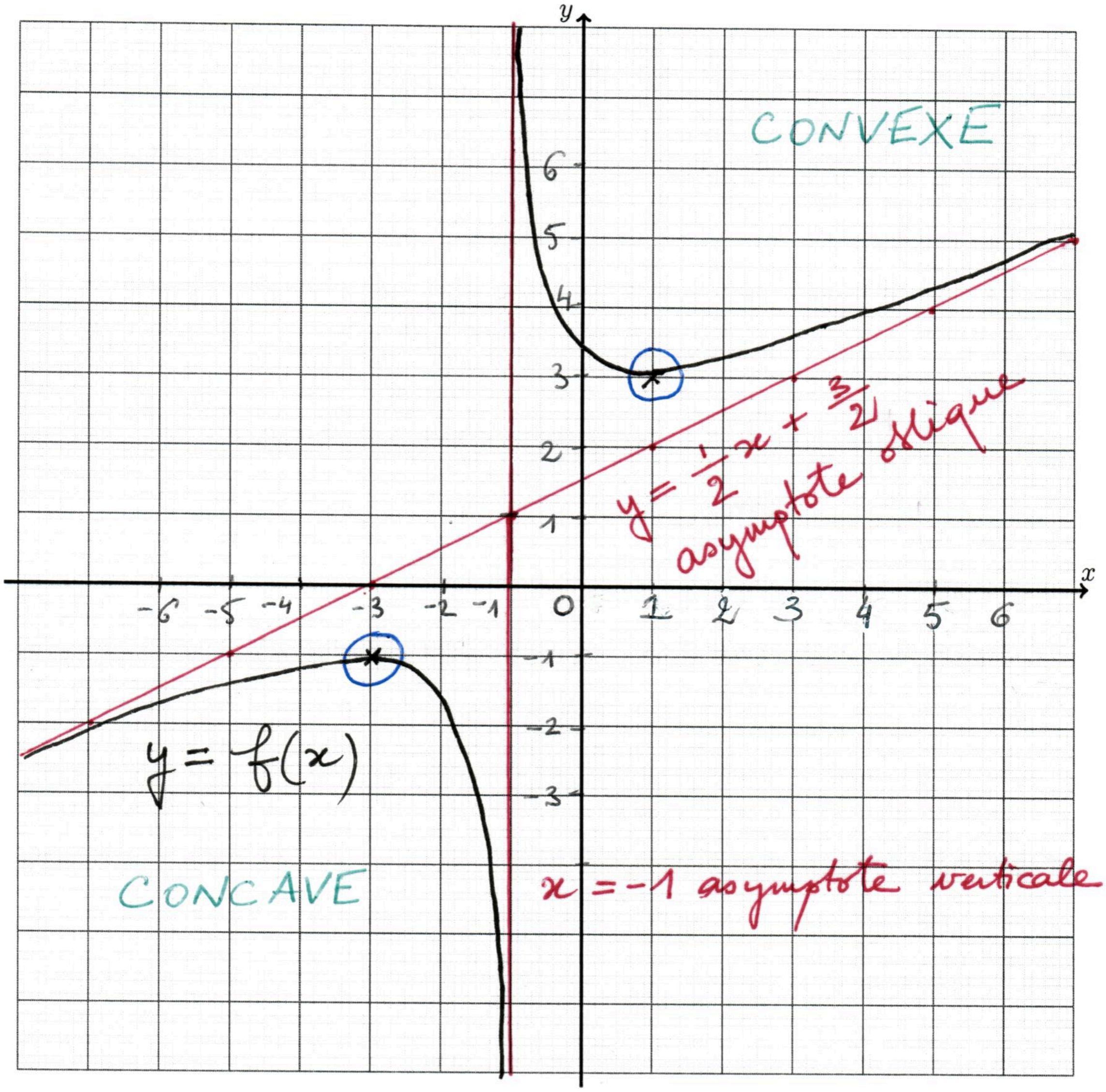
$$= \frac{(x-1)(x+3)}{2(x+1)^2}$$

(b) Compléter le tableau de variations suivant : (3 pts)

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

4. Tracé du graphe (4pts)

Tracer le graphe de f dans le quadrillage ci-dessous (on commencera par tracer les asymptotes !)



5. Répondre aux questions suivantes sans justification

(a) Donner un intervalle sur lequel la fonction f est convexe. (2pts)

La fonction f est convexe sur $]-1, +\infty[$

(b) Préciser sur le graphe de f la position des extremums locaux. (2pts)

Ils sont entourés en bleu sur le graphe

(c) Déterminer Im(f), l'image de f (c'est à dire l'ensemble des valeurs prises par f). (2pts)

$Im(f) =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$