Exercice 1 : croissance tumorale avec traitement [9 points]

Une première étape de la maladie du cancer consiste en une division frénétique et anarchique d'un certain nombre de *cellules cancéreuses*, qui forment un agrégat de cellules appelé *tumeur*. Durant cette phase, le nombre de cellules cancéreuses ne cesse de doubler au cours du temps.
Une modélisation simplifiée de ce processus en termes d'équations différentielles est la suivante : en notant y le nombre de cellules cancéreuses au temps t, la fonction y est solution de l'équation homogène

$$(Cancer) : \begin{cases} y' = 2y, \\ y(0) = 1000. \end{cases}$$

Dans toute la suite, le nombre de cellules y est une variable du temps t que l'on exprime en jours - ainsi, la quantité $y(t)$ désigne le nombre de cellules cancéreuses à l'instant t. Par exemple, au jour $t = 0$ (début de la maladie), il y a 1000 cellules cancéreuses.

Question 1. Résoudre l'équation différentielle précédente.

Trois biologistes en compétition souhaitent influer le comportement de la croissance tumorale via une chimiothérapie qui a pour effet de tuer un certain nombre de cellules cancéreuses au cours du temps. Plus précisément, **les biologistes souhaitent ici éradiquer la maladie au bout de 10 jours**.
L'équation de l'évolution du cancer avec chimiothérapie s'écrit

$$(Chimio) : \begin{cases} y' = 2y + c(t), \\ y(0) = 1000. \end{cases}$$

où $c(t)$ désigne l'effet de la chimiothérapie.

Mathématiquement parlant, les biologistes sont ainsi à la recherche d'une fonction $c(t)$ de sorte que la solution y de l'équation différentielle *(Chimio)* vérifie : $y(10) = 0$.
Question 2. Le premier biologiste choisit d'enlever un nombre constant de cellules par unité de temps : il prend $c(t) = -1000$. L'équation différentielle s'écrit alors

$$(Chimio1) : \begin{cases} y' = 2y - 1000, \\ y(0) = 1000. \end{cases}$$

Trouver la solution y de cette équation. Que vaut $y(10)$?

Question 3. Le deuxième biologiste choisit d'enlever un nombre polynomial de cellules par unité de temps : il prend $c(t) = -2t^2$. L'équation différentielle s'écrit alors

$$(Chimio2) : \begin{cases} y' = 2y - 2t^2, \\ y(0) = 1000. \end{cases}$$

Trouver la solution y de cette équation, en cherchant la solution particulière y_p sous la forme

$$y_p(t) = At^2 + Bt + C.$$

Que vaut $y(10)$?

Question 4. Le troisième biologiste choisit d'enlever un nombre exponentiel de cellules au cours du temps : il prend $c(t) = -100e^{2t}$. L'équation différentielle s'écrit alors

$$(Chimio3) : \begin{cases} y' = 2y - 100e^{2t}, \\ y(0) = 1000. \end{cases}$$

Trouver la solution y de cette équation, en cherchant y_p sous la forme

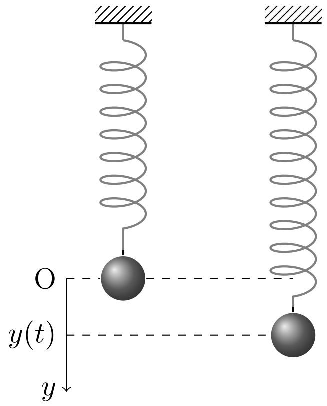
$$y_p(t) = Ate^{2t}.$$

Que vaut $y(10)$?

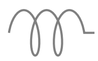
Question 5. Selon ce modèle, quelle est la chimiothérapie idéale afin d'éradiquer la maladie au bout de 10 jours ?

Exercice 2 : système masse-ressort [4 points]

Soit un objet M de masse $m > 0$ accroché à l'extrémité d'un ressort vertical de constante de raideur $k > 0$. A l'instant $t = 0$, on écarte l'objet de sa position d'équilibre d'une grandeur y_0, puis on le lâche sans vitesse initiale. On note $y(t)$ l'altitude de l'objet à l'instant t, par rapport à sa position d'équilibre.



 : objet M de masse m

 : ressort de constante de raideur k

Le principe fondamental de la dynamique indique que l'altitude y est solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{k}{m} y = 0, \\ y(0) = y_0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Déterminer l'évolution de l'altitude y au cours du temps, *i.e.* résoudre l'équation différentielle ci-dessus.

Exercice 3 : deux équations différentielles [7 points]

Résoudre les deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} 2y' - x^2 y = 2 - x^3 \\ y(1) = 999, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y'' - 2y' - 3y = -4e^{-x} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$