Exercice 1 : croissance tumorale avec traitement [9 points]

Question 1. Soit (H) l'équation différentielle homogène : $y' = 2y$. Les solutions de (H) sont les fonctions y_λ définies par

$$y_\lambda(t) = \lambda e^{2t}.$$

Initialement, il y a 1000 cellules cancéreuses ce qui se traduit par $y(0) = 1000$. Cette condition initiale permet de déterminer le réel λ qui convient, à savoir $\lambda = 1000$. Au final, l'unique solution de

$$(Cancer) : \begin{cases} y' = 2y, \\ y(0) = 1000 \end{cases}$$

est

$$y(t) = 1000e^{2t}$$

Remarque. Ce n'était pas demandé mais sans traitement, le nombre de cellules cancéreuse au temps $t = 10$ est $y(10) \simeq 485165195410$.

Question 2. Notons (E) : $y' = 2y - 1000$. L'équation différentielle (E) est sous la forme

$$y' = ay + b,$$

où $a = 2$ et $b = -1000$. Les solutions de (E) sont ainsi les fonctions y_λ définies par

$$y_\lambda(t) = \lambda e^{2t} + 500.$$

Initialement, il y a 1000 cellules cancéreuses ce qui se traduit par $y(0) = 1000$. Cette condition initiale permet de déterminer le réel λ qui convient : on doit en effet avoir

$$1000 = \lambda + 500,$$

i.e. $\lambda = 500$. Au final, l'unique solution de

$$(Chimio1) : \begin{cases} y' = 2y - 1000, \\ y(0) = 1000 \end{cases}$$

est

$$y(t) = 500e^{2t} + 500$$

et on a ainsi $y(10) = 500e^{20} + 500 \simeq 242582598205$ cellules au temps $t = 10$.

Question 3. Notons (E) l'équation différentielle :

$$y' = 2y - 2t^2.$$

L'équation homogène associée (H) est

$$(H) : y' = 2y$$

et les solutions de l'équation homogène sont les fonctions y_λ définies par

$$y_\lambda(t) = \lambda e^{2t}.$$

Pour terminer la résolution de (E), il reste à trouver une solution particulière de (E). Pour cela, on suit l'indication et on cherche un solution particulière y_p de (E) sous la forme

$$y_p(t) = At^2 + Bt + C,$$

où A, B et C sont trois réels à déterminer de sorte que y_p soit effectivement solution de (E), c'est-à-dire

$$y_p'(t) - 2y_p(t) = -2t^2.$$

Si $y_p(t) = At^2 + Bt + C$, on a

$$y_p'(t) = 2At + B,$$

et après simplifications on trouve

$$y_p'(t) - 2y_p(t) = -2At^2 + (2A - 2B)t + B - 2C.$$

On veut que $y_p'(t) - 2y_p(t)$ soit égal à $-2t^2$, donc on veut que $-2At^2 + (2A - 2B)t + B - 2C$ soit égal à $-2t^2$. Il faut donc prendre $A = 1$, $B = 1$ et $C = \dfrac{1}{2}$. La solution particulière est donc

$$y_p(t) = t^2 + t + \frac{1}{2},$$

et la solution générale de (E) est formée des fonctions y_λ définies par

$$y_\lambda(t) = \lambda e^{2t} + t^2 + t + \frac{1}{2}.$$

De plus, pour avoir $y(0) = 1000$, on doit choisir λ de sorte que

$$1000 = \lambda + \frac{1}{2},$$

à savoir $\lambda = \dfrac{1999}{2}$. Au final, l'unique solution de

$$(Chimio2) : \begin{cases} y' = 2y - 2t^2, \\ y(0) = 1000 \end{cases}$$

est

$$\boxed{y(t) = \frac{1999}{2}e^{2t} + t^2 + t + \frac{1}{2}}$$

et on a ainsi $\boxed{y(10) = \dfrac{1999}{2}e^{20} + (10)^2 + 10 + \dfrac{1}{2} \simeq 484922612923}$ cellules au temps $t = 10$.

Question 4. Notons (E) l'équation différentielle :

$$y' = 2y - 100e^{2t}.$$

L'équation homogène associée (H) est

$$(H) : y' = 2y$$

et les solutions de l'équation homogène sont les fonctions y_λ définies par

$$y_\lambda(t) = \lambda e^{2t}.$$

Pour terminer la résolution de (E), il reste à trouver une solution particulière de (E). Pour cela, on suit l'indication et on cherche un solution particulière y_p de (E) sous la forme

$$y_p(t) = Ate^{2t}$$

où Aest un réel à déterminer de sorte que y_p soit effectivement solution de (E), c'est-à-dire

$$y_p'(t) - 2y_p(t) = -100e^{2t}.$$

Si $y_p(t) = Ate^{2t}$, on a

$$y_p'(t) = Ae^{2t} + 2Ate^{2t}$$

et après simplifications on trouve

$$y_p'(t) - 2y_p(t) = Ae^{2t}.$$

On veut que $y_p'(t) - 2y_p(t)$ soit égal à $-100e^{2t}$, donc on veut que Ae^{2t} soit égal à $-100e^{2t}$. Il faut donc prendre $A = -100$ La solution particulière est donc

$$y_p(t) = -100te^{2t}$$

et la solution générale de (E) est formée des fonctions y_λ définies par

$$y_\lambda(t) = \lambda e^{2t} - 100te^{2t}.$$

De plus, pour avoir $y(0) = 1000$, on doit choisir λ de sorte que $\lambda = 1000$. Au final, l'unique solution de

$$(Chimio3) : \begin{cases} y' = 2y - 100e^{2t}, \\ y(0) = 1000. \end{cases}$$

est

$$y(t) = 1000e^{2t} - 100te^{2t}$$

et on a ainsi $y(10) = 1000e^{20} - 1000e^{20} = 0$ cellules au temps $t = 10$.

Question 5. La chimiothérapie idéale est celle associée à la fonction $c(t) = -100e^{2t}$, puisqu'elle conduit à un nombre de cellules cancéreuses nul au temps $t = 10$.

Exercice 2 : système masse-ressort [4 points]

Notons

$$(H): \; y'' + \frac{k}{m}y = 0.$$

L'équation caractéristique associée est

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0,$$

qui a pour solutions $z_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}i$ et $z_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}}i$, puisque $\frac{k}{m} > 0$. Les solutions de (H) sont les fonctions y définies par

$$y(t) = \lambda \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \mu \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

Les conditions initiales $y(0) = y_0$ et $y'(0) = 0$ vont nous permettre de déterminer la valeur des réels λ et μ. En effet, la condition $y(0) = y_0$ permet d'écrire

$$\lambda + 0 = y_0,$$

à savoir $\lambda = y_0$. Ayant

$$y'(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}\lambda \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \mu\sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right),$$

la deuxième condition $y'(0) = 0$ permet d'obtenir

$$0 + \sqrt{\frac{k}{m}}\mu = 0,$$

à savoir $\mu = 0$. Au final, l'unique solution du problème de Cauchy est

$$\boxed{y(t) = y_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)}$$

Exercice 3 : deux équations différentielles [7 points]

Commençons par résoudre le premier problème de Cauchy :

$$\begin{cases} 2y' - x^2y = 2 - x^3 \\ y(1) = 999. \end{cases}$$

Notons (E) l'équation différentielle :

$$(E): \; 2y' - x^2y = 2 - x^3.$$

L'équation homogène associée (H) est

$$(H): \; y' = \frac{x^2}{2}y,$$

et les solutions de l'équation homogène sont les fonctions y_λ définies par

$$y_\lambda(x) = \lambda e^{\frac{x^3}{6}}.$$

Une solution particulière de (E) est $y_p(x) = x$. Les solutions de (E) sont donc les fonctions y_λ définies par

$$y_\lambda(x) = \lambda e^{\frac{x^3}{6}} + x.$$

De plus, pour avoir $y(1) = 999$, on doit choisir λ de sorte que

$$\lambda e^{\frac{1}{6}} + 1 = 999,$$

à savoir $\lambda = 998e^{-\frac{1}{6}}$. La solution recherchée est ainsi

$$y(x) = 998e^{-\frac{1}{6}}e^{\frac{x^3}{6}} + x$$

Terminons par le second problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = -4e^{-x} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Notons

$$(E) : \quad y'' - 2y' - 3y = -4e^{-x}.$$

L'équation homogène associée à (E) est

$$(H) : \quad y'' - 2y' - 3y = 0,$$

et l'équation caractéristique associée est

$$r^2 - 2r - 3 = 0.$$

Ayant $\Delta = 16$, on obtient deux racines réelles distinctes qui sont

$$r = -1 \quad \text{et} \quad r_2 = 3.$$

Les solutions de (H) sont ainsi les fonctions y définies par

$$y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{3x}.$$

Pour terminer la résolution de (E), il reste à trouver une solution particulière de (E). Pour cela, on remarque que le second membre s'écrit sous la forme d'un polynôme fois une exponentielle - plus précisément, on a

$$-4e^{x} = P(x)e^{rx},$$

où $P(x) = -4$ et $r = -1$. Puisque $r = -1$ est une racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière y_p sous la forme

$$y_p(x) = xQ(x)e^{-x},$$

où Q est un polynôme de même degré que P. Le polynôme P étant constant, il est de degré 0 et on cherche Q comme étant un polynôme de degré 0 aussi, *i.e.* on cherche Q comme étant une constante c à déterminer. La solution particulière y_p est donc à chercher sous la forme

$$y_p(x) = cxe^{-x},$$

avec le réel c à déterminer. Avec y_p sous cette forme, on a

$$y_p'(x) = ce^{-x} - cxe^{-x} \quad \text{et} \quad y_p''(x) = -2ce^{-x} + cxe^{-x}.$$

Après simplifications, on obtient

$$y_p''(x) - 2y_p'(x) - 3y_p(x) = -4ce^{-x},$$

et on veut que cette dernière quantité soit égale à $-4e^{-x}$: il faut prendre $c = 1$. Au final, les solutions de (E) sont les fonctions y définies par

$$\boxed{y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{3x} + xe^{-x}.}$$

On a ainsi :

$$y'(x) = -\lambda e^{-x} + 3\mu e^{3x} + e^{-x} - xe^{-x},$$

et les conditions $y(0) = 2$ et $y'(0) = -1$ conduisent au système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ -\lambda + 3\mu + 1 = -1, \end{cases}$$

ce qui donne $\lambda = 2$ et $\mu = 0$. Au final, l'unique solution du second problème de Cauchy est

$$y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$$