Exercice 1 : équations différentielles d'ordre un [5 points]

Résoudre les deux problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} 5y' + y = \cos\left(\dfrac{x}{5}\right) \\ y(0) = -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -7e^{-x}y' + y = 1 \\ y(\ln(7)) = e + 1 \end{cases}$$

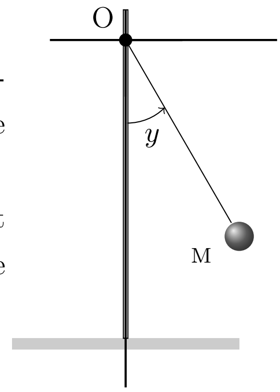
Pour la première équation différentielle, on pourra rechercher une solution particulière y_p sous la forme

$$y_p(x) = A\cos\left(\frac{x}{5}\right) + B\sin\left(\frac{x}{5}\right),$$

où A et B sont deux réels à déterminer.

Exercice 2 : équation différentielle homogène d'ordre deux [4 points]

On considère un pendule fixé au bout d'une tige rigide. Le pendule est assimilé à un point matériel M, et on s'intéresse au mouvement du pendule après l'avoir écarté légèrement de l'axe vertical.
On repère le pendule via l'angle y formé par l'axe vertical et la tige reliant l'origine du repère au pendule. On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, l'angle initial vaut $y(0) = 2^\circ$.



En tenant compte des frottements dus à la tige, le principe fondamental de la dynamique indique que l'angle y est solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + y' + y = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Déterminer l'évolution de l'angle y au cours du temps, *i.e.* résoudre l'équation différentielle ci-dessus.

Exercice 3 : recherche d'extremums locaux [5 points]

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de deux variables définie par

$$f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 5xy - 3x + 2y + 9.$$

1. Calculer les dérivées partielles premières, à savoir $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

2. Montrer que la fonction f possède un unique point critique.

3. Ce point critique est-il un minimum local ou un maximum local ?

Exercice 4 : calcul d'incertitude [2 points]

On s'intéresse à un système de chauffage comportant une résistance R alimentée par une tension U. On a mesuré les valeurs numériques suivantes :

$$R = 90 \pm 2\ \Omega \quad \text{et} \quad U = 210 \pm 1\ V.$$

La puissance P consommée par le chauffage est

$$P = \frac{U^2}{R}.$$

Quelle est l'incertitude absolue et l'incertitude relative associée à la puissance P ?

Exercice 5 : équation différentielle d'ordre trois [6 points]

On se propose de trouver les solutions y de l'équation différentielle d'ordre trois suivante :

$$(E_1) : \quad y''' + 4y' = (5x+7)e^x.$$

La résolution des équations d'ordre trois n'est pas au programme. Ici, nous allons résoudre cette équation en commençant par se ramener à la résolution d'une équation d'ordre deux.

Les trois premières questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Pour y une solution de (E_1), notons $z = y'$ la dérivée de y. Vérifier que z est solution de l'équation différentielle d'ordre deux suivante :

$$(E_2) : \quad z'' + 4z = (5x+7)e^x.$$

2. Déterminer les solutions z de l'équation différentielle d'ordre deux (E_2).

3. Montrer que la fonction H définie par $H(x) = xe^x$ est une primitive de la fonction y_p définie par $y_p(x) = (x+1)e^x$.

4. A l'aide des trois questions précédentes, déterminer toutes les solutions y de l'équation différentielle (E_1). On pourra remarquer que, ayant $y' = z$, les solutions y de (E_1) sont les primitives des solutions z de (E_2).