CHAPITRE 3

Dérivation : rappels et compléments

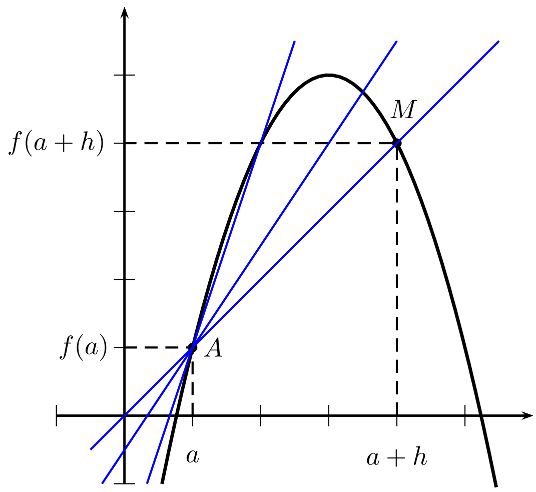
1 Quelques rappels de première

Dans toute la suite, I désigne un intervalle et f est une fonction définie sur I.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1.1 Nombre dérivée en un point

Définition 1 | *Nombre dérivé en un point*

Interprétation géométrique. Soit $a \in I$ et $h \neq 0$.

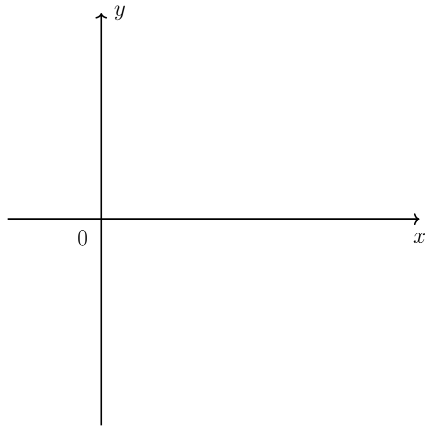


Définition 2 | *Tangente en un point*

On retient que, si f est dérivable en $a \in I$,

«	»

Remarque 1.1 — Soit $a \in I$. Si $f'(a) = 0$, ________



Exercice 1 Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1 — Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

-
-

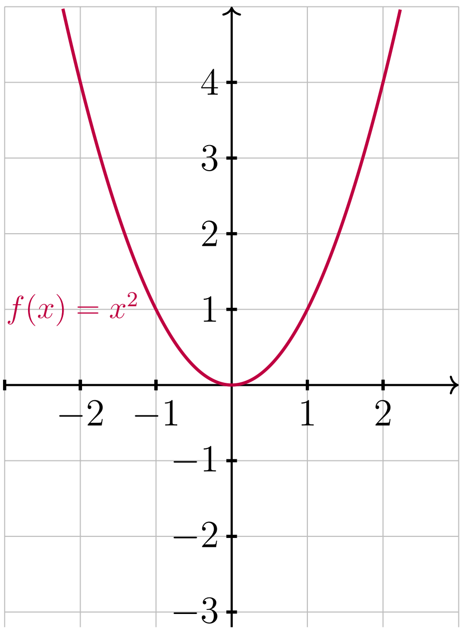
2 — Montrer que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.

-
-

3 — Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0

4 — Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

5 — Représenter les deux tangentes sur le graphique ci-contre.



1.2 Fonction dérivable

Définition 3 | *Fonction dérivée*

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I.

____

____

____

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x.

-
-

1.3 Dérivées de fonctions usuelles

Ci-dessous le tableau des dérivées des fonctions usuelles que vous connaissez jusqu'à présent.
Les quantités a et b désignent deux réels quelconques.

Fonction f	**Fonction f'**	**Intervalle I**
k (constante)		
x		
$ax + b$		
x^2		
x^3		
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$		
$\frac{1}{x}$		
$\sin(x)$		
$\cos(x)$		
$\sin(ax + b)$		
$\cos(ax + b)$		

Exercice 3 ***Quelques dérivées usuelles***

1 — Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$.

2 — Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.

3 — Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(7x + \sqrt{2})$

4 — Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2019$

1.4 Opérations sur les dérivées

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Opération	Fonction	Dérivée	Condition
Addition	$u + v$		
Multiplication	ku $(k \in \mathbb{R})$		
Produit	$u \times v$		
Inverse	$\frac{1}{u}$		
Quotient	$\frac{u}{v}$		

Exercice 4

1 — Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$

2 — Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin(x)$

3 — Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{x-4}{x^2+1}$.

1.5 Variations d'une fonction

Théorème 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- f est **croissante** sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, ____________
- f est **constante** sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, ____________
- f est **décroissante** sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, ____________

Exemple 1 — Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x$.

2 Dérivée de u^n

2.1 Fonction u^n

Définition 4

____

____

Exemple 2 — Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 1$. Alors, la fonction u^3 est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u^3(x) =$$

Définition 5

____

____

Exemple 3 — Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 1$. Ayant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\quad}$ alors la fonction u^{-7} est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u^{-7}(x) =$$

2.2 Dérivée de u^n (cas $n > 0$)

Théorème 2 | *Dérivée de u^n pour $n > 0$*

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit $n > 0$ un entier.

____

____

Exemple 4 — Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x + 1)^7$

■ **Exemple 5** — Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+1)^4$

■

2.3 Dérivée de u^n (cas $n < 0$)

Théorème 3 | *Dérivée de u^n pour $n < 0$*

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit $n < 0$ un entier.

____

____

■ **Exemple 6** — Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{(5x-2)^3}$

■

■ **Exemple 7** — Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^9}$

■

3 Dérivée d'une composée de fonctions

Attention

Ce théorème est donné à titre d'information mais n'est pas exigible d'être maîtrisé en STL.

Théorème 4

Exemple 8 — Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x^2 + 3x)$