CHAPITRE 2

Généralités sur les fonctions

Dans les années 1980, Song modélise mathématiquement la population chinoise en **fonction** du temps et du nombre moyen d'enfants dans la population. Après calculs, Song en déduit que seul un enfant par couple permet de diminuer quantitativement la population chinoise. C'est ainsi qu'est née la politique de l'enfant unique en Chine.

1 Vocabulaire des fonctions

1.1 Définitions

Définition 1 | *Fonction*

____

____

____

____

Notation | *Fonction*

Une fonction f définie sur I peut se noter essentiellement de trois façons :

Exemple 1 —

Attention

En toute rigueur, on n'écrit pas : ____

____

1.2 Images et antécédents

Définition 2 | *Images et antécédents.*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- si $x \in I$, l'**image** de x par f est le réel ____________
- si $y \in \mathbb{R}$, on appelle **antécédent** de y par f ________________________________

  ____

Exemple 2 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$. On a :

On dit que :

«	»

et :

«	»

Exemple 3 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - x^2$. Complétez le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$									

- L'image de -2 par f est égale à ______
- L'image de 0 par f est égale à ______
- L'image de 3 par f est égale à ______
- Un antécédent de 4 par f est ______
- Un antécédent de 0 par f est ______ , car ______
- Un autre antécédent de 0 par f est ______, car ______

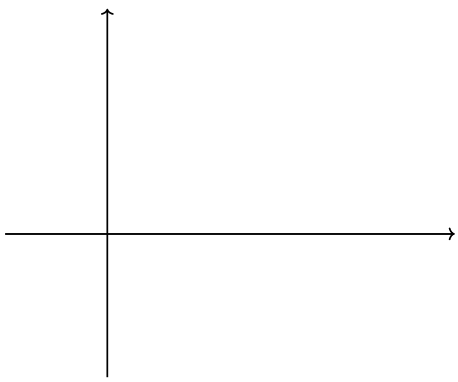
Exemple 4 — Soit f la fonction affine definie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 5$. Quels sont les antécédents de 3 par f ?

2 Courbe représentative d'une fonction

2.1 Définition

Définition 3 | *Graphe d'une fonction*

Soit f une fonction définie sur I.



Graphe d'une fonction

En particulier, si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction, on a :

$$\boxed{M(x, y) \in \mathcal{C}_f \text{ si et seulement si :}}$$

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x + 3$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1 — Le point $A(10, 193)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$?

2 — Le point $B(-5, 60)$ appartient-il à $\mathcal{C}_f$?

3 — Quelle est l'ordonnée du point C de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 100 ?

1.

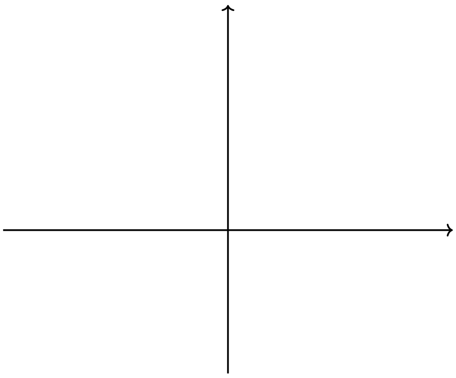
2. ______________________________

3. ______________________________

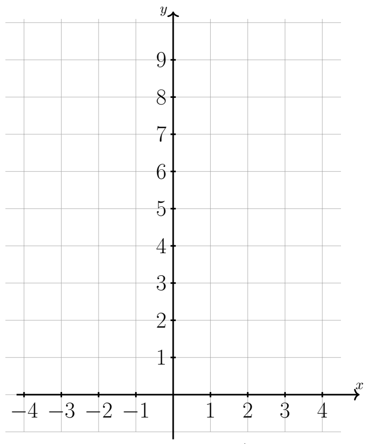
2.2 Fonctions paires et impaires

Définition 4 | *Fonction paire*

Soit f une fonction définie sur I.



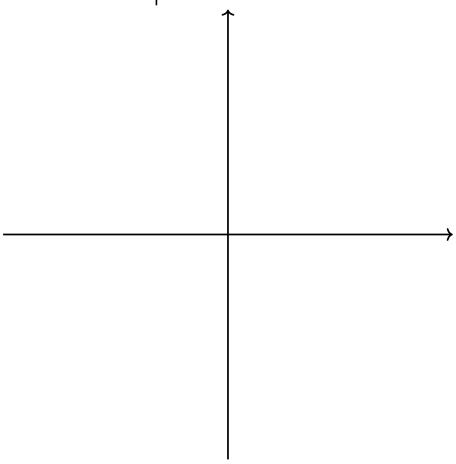
Interprétation graphique. ______________________________



Exemple 5 — Un exemple célèbre de fonction paire est la fonction ____________ définie sur ____ par $f(x) =$

Définition 5 | *Fonction impaire*

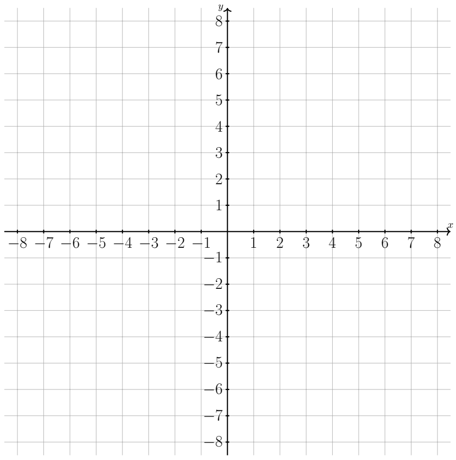
Soit f une fonction définie sur I.



Interprétation graphique. ____

____

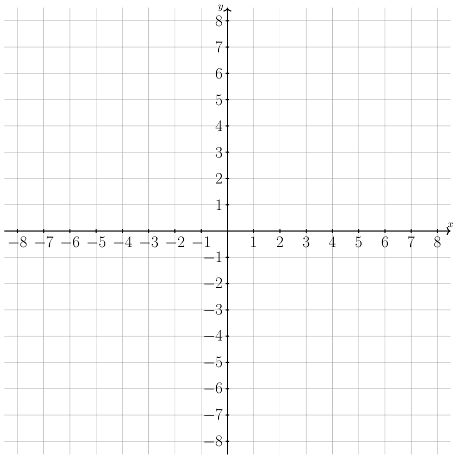
____



■ **Exemple 6 —** Un exemple célèbre de fonction impaire est la fonction ________________ définie sur ________________ par

$$f(x) =$$

■



■ **Exemple 7 —** Un autre exemple de fonction impaire est la fonction ________________ définie sur ________________ par

$$f(x) =$$

■

2.3 Résolution graphique d'équations et inéquations

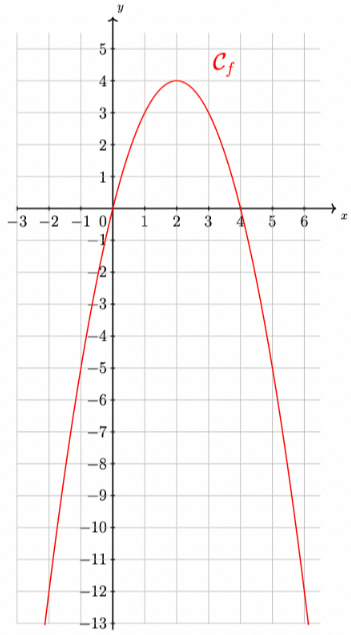
Méthode

Soit k un réel. Pour résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = k$:

- ____
- ____

  ____

  ____



■ **Exercice 2** Soit f la fonction dont le graphe est représenté ci-contre.

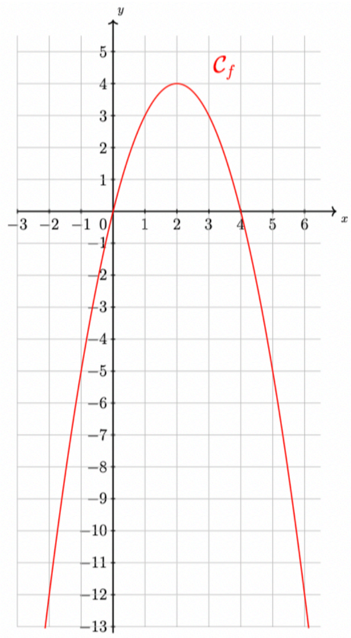
1 — Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -12$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2 — Déterminer graphiquement les antécédents de 3 par f.

Méthode

Soit k un réel. Pour résoudre graphiquement une équation du type $f(x) \geqslant k$ ou $f(x) > k$:

- ____
- ____



■ **Exercice 3** Soit f la fonction dont le graphe est représenté ci-contre. Résoudre graphiquement l'inéquation

$$f(x) \geqslant -5$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Méthode

Soit k un réel. Pour résoudre graphiquement une équation du type $f(x) \leqslant k$ ou $f(x) < k$:

- ____
- ____

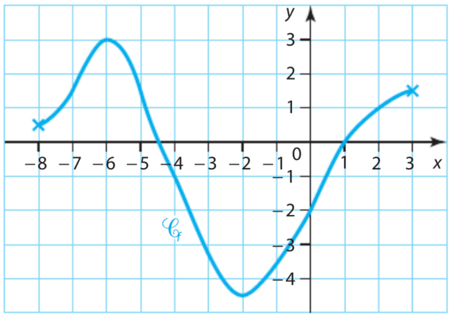
  ____

  ____

Exercice 4 Soit f la fonction dont le graphe est représenté ci-contre. Résoudre graphiquement l'inéquation

$$f(x) < 1,5$$

d'inconnue $x \in [-8; 3]$.



3 Variations d'une fonction. Taux de variation d'une fonction

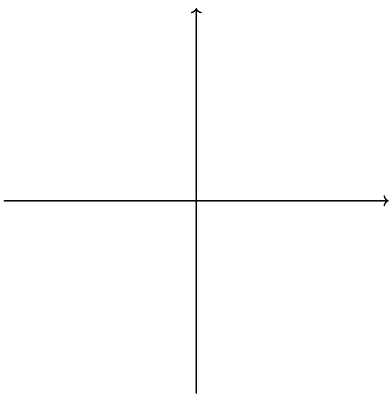
3.1 Variations d'une fonction

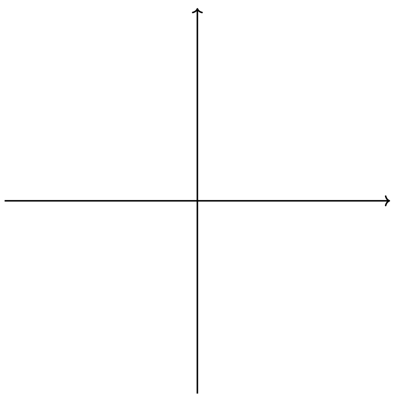
Définition 6 | *Croissance*

Soit f une fonction définie sur I.

- On dit que f est **croissante** sur I si, pour tous réels a et b dans I, on a :

- On dit que f est **strictement croissante** sur I si, pour tous réels a et b dans I, on a :



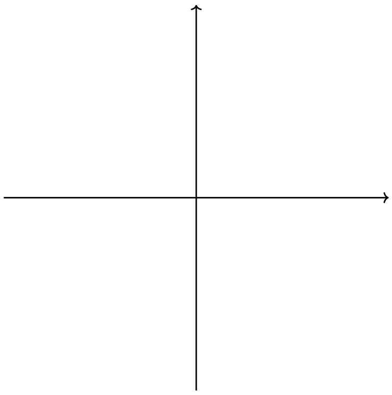


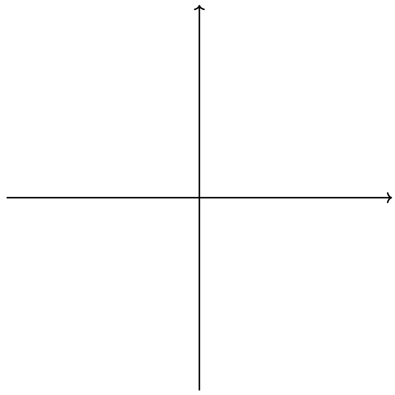
Définition 7 | *Décroissance*

Soit f une fonction définie sur I.

- On dit que f est **décroissante** sur I si, pour tous réels a et b dans I, on a :

- On dit que f est **strictement décroissante** sur I si, pour tous réels a et b dans I, on a :

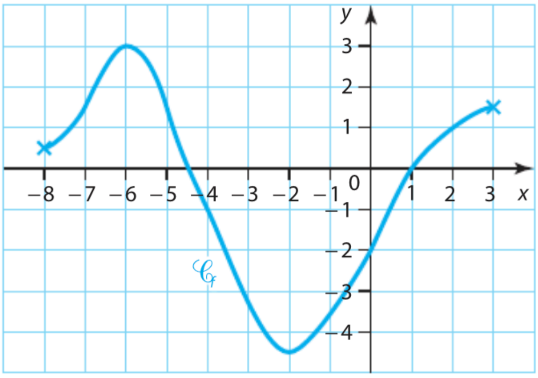




Remarque 3.1 — Vocabulaire.

Exemple 8 — Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Montrer que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Rappelons que les variations d'une fonction peuvent se résumer via un **tableau de variations**. Voici un exemple associé à cette fonction.



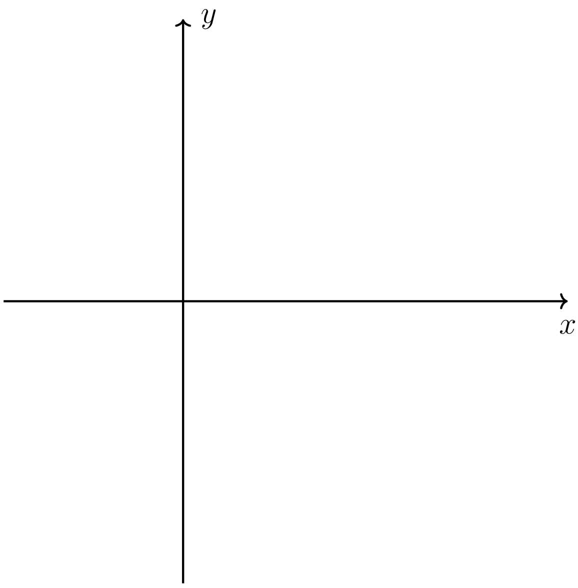
3.2 Taux de variation d'une fonction entre deux points

Définition 8 | *Taux de variation entre deux points*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soient a et b deux points distincts de I. Le *taux de variation de f* entre a et b est défini par

$$\tau(a, b) =$$

Interprétation graphique. Le taux de variation entre a et b représente : ______________________________



Taux de variation entre a et b.

Remarque 3.2 — Vocabulaire. ______________________________

Exemple 9 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+x+3$. Calculer le taux de variation de f entre 0 et 2 et interpréter graphiquement.

Proposition 1 | *Taux de variation d'une fonction affine*

Preuve

Exemple 10 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x + 7$. Déterminer le taux de variation de f entre -567 et 2019.

Proposition 2 | *Lien taux de variation - monotonie*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si, pour tous réels a et b distincts dans I :

- ____
- ____
- ____

Exemple 11 — Soit f la fonction carré définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2$. Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$.

Remarque 3.3 — Interprétation cinématique du taux de variation.

- Si d est une fonction modélisant une distance par rapport au temps, le taux de variation entre deux temps t_1 et t_2, défini par
$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1}$$
représente : ____
Si v est une fonction modélisant une vitesse par rapport au temps, le taux de variation entre deux temps t_1 et t_2, défini par
$$\frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$
représente : ____