CHAPITRE 2

Limites de fonctions

Soit f une fonction définie sur I. Soit a un point de I (ou bien une borne de I). Le but du cours est de donner un sens à la notation :

qui signifie, moralement, que la quantité $f(x)$ se rapproche de ℓ lorsque x se rapproche de a.

1 Limite d'une fonction en $+\infty$

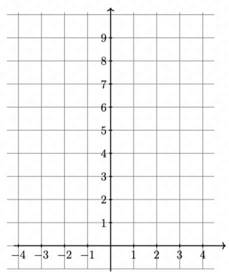
1.1 Premiers exemples

Exemple 1 — ***La fonction carré.*** Que devient x^2 lorsque x devient de plus en plus grand ?

Approche numérique

x	1	10	100	10^5	10^{10}	10^{50}
x^2						

Approche graphique



Observation : ____________________

____

On dit que : ____________________

____

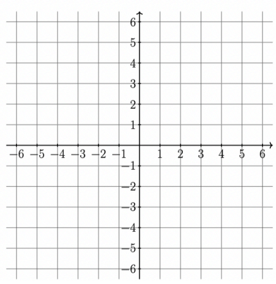
On note :

Exemple 2 — ***La fonction inverse.*** Que devient $\dfrac{1}{x}$ lorsque x devient de plus en plus grand ?

Approche numérique

x	1	2	5	10	10^{10}	10^{50}
$\dfrac{1}{x}$						

Approche graphique



Observation : ____

____

On dit que : ____

____

On note :

1.2 Limite infinie en $+\infty$

Définition 1

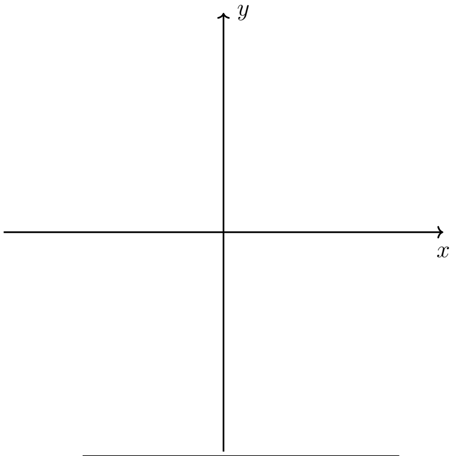
Soit f une fonction au moins définie sur un intervalle du type $[a, +\infty[$, avec a un réel.

- ____
  ____
  ____
  ____

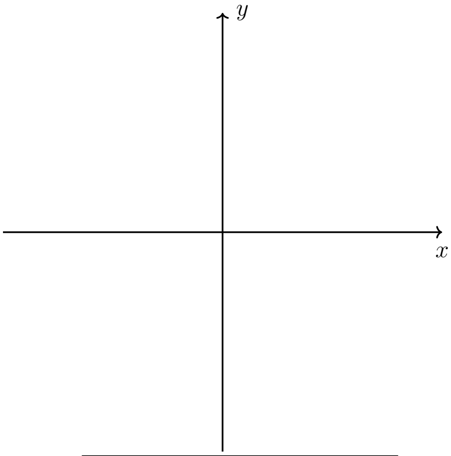
  On note :

- ____
  ____
  ____
  ____

  On note :

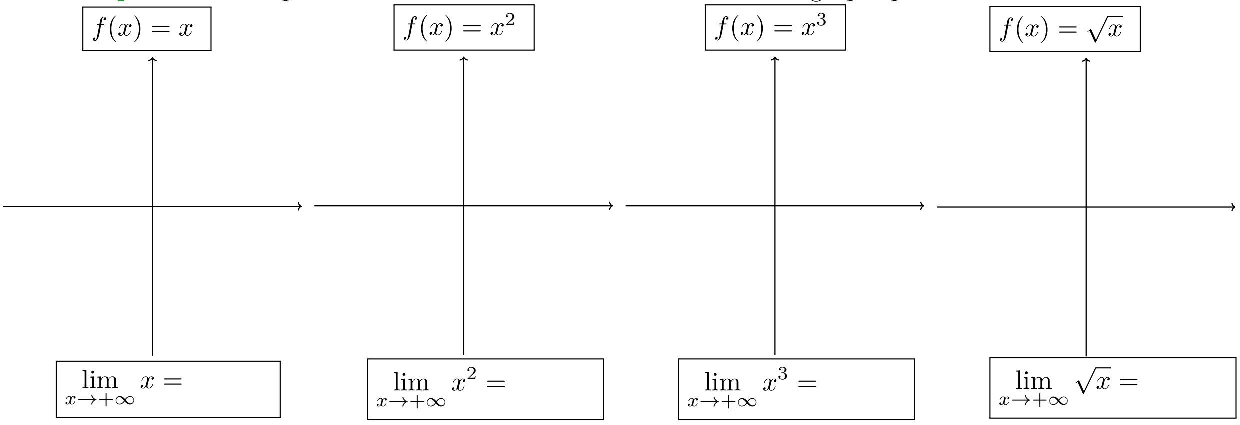


Cas où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Cas où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Exemple 3 — Représenter l'allure des fonctions et déterminer graphiquement leurs limites en $+\infty$.



1.3 Limite finie en $+\infty$

Définition 2 | *Limite finie en $+\infty$*

Soit f une fonction au moins définie sur un intervalle du type $[a, +\infty[$, avec a un réel.

____

____

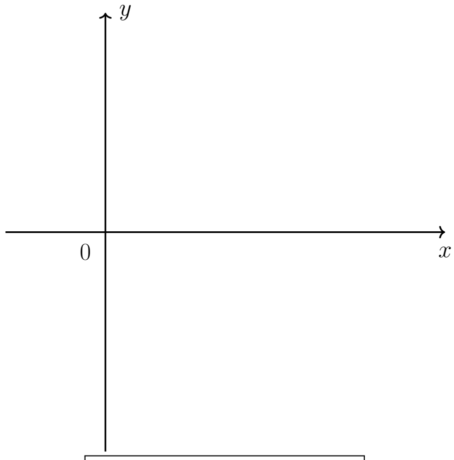
____

____

____

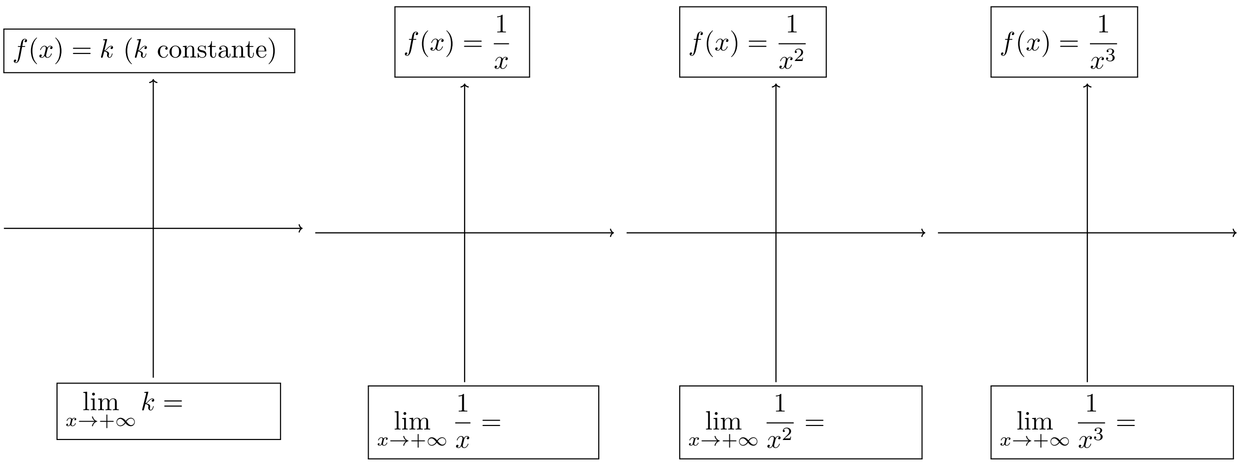
____

On note :



Cas où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Exemple 4 — Représenter l'allure des fonctions et déterminer graphiquement leurs limites en $+\infty$.



2 Limite d'une fonction en $-\infty$

Les notions précédentes s'adaptent dans le cas de l'étude d'une fonction au voisinage de $-\infty$.

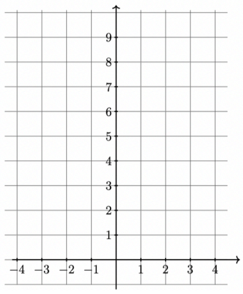
2.1 Premiers exemples

Exemple 5 — ***La fonction carré.*** Que devient x^2 lorsque x devient de plus en plus petit (voisin de $-\infty$) ?

Approche numérique

x	-1	-10	-100	-10^5	-10^{10}	-10^{50}
x^2						

Approche graphique



Observation : ______________________________

____

On dit que : ______________________________

____

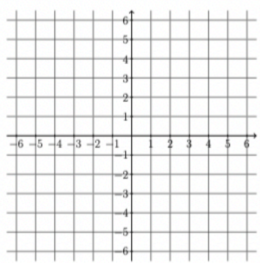
On note :

Exemple 6 — ***La fonction cube.*** Que devient x^3 lorsque x devient de plus en plus petit (voisin de $-\infty$) ?

Approche numérique

x	-1	-2	-5	-10	-10^{10}	-10^{50}
x^3						

Approche graphique



Observation : ______________________________

____

On dit que : ______________________________

____

On note :

2.2 Limite infinie en $-\infty$

Définition 3

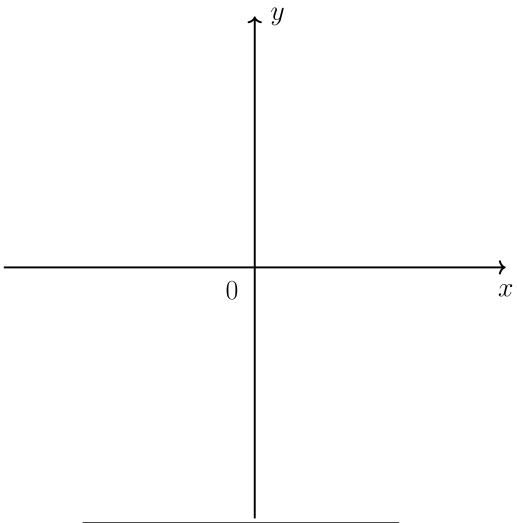
Soit f une fonction au moins définie sur un intervalle du type $]-\infty, a]$, avec a un réel.

-

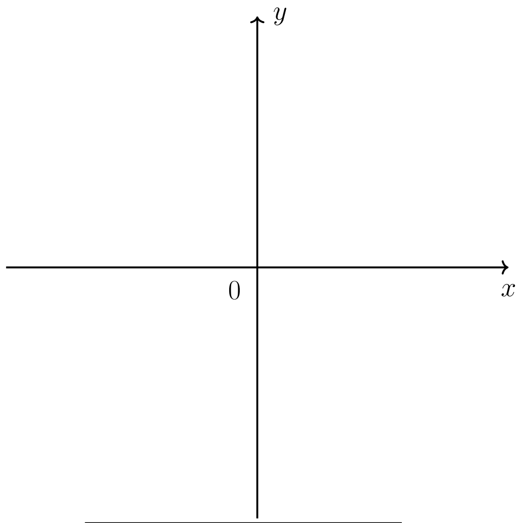
On note :

-

On note :



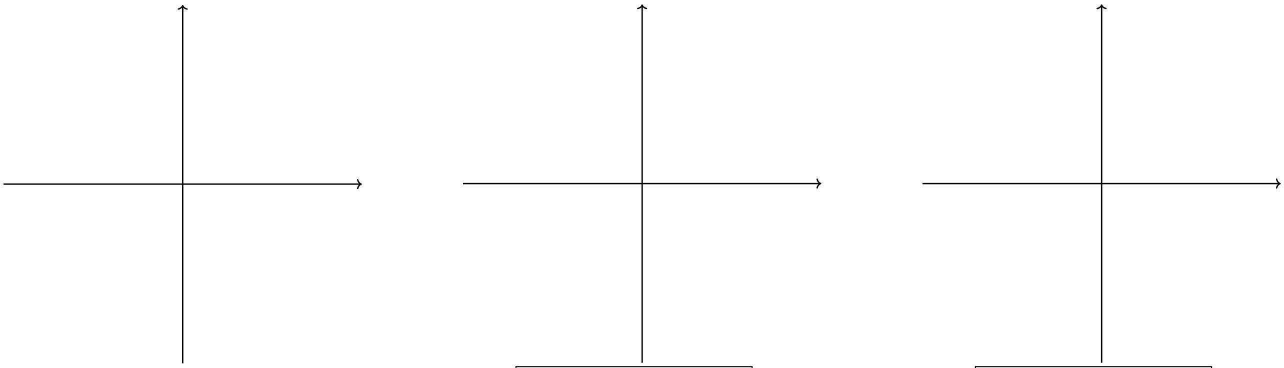
Cas où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



Cas où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Exemple 7 — Représenter l'allure des fonctions et déterminer graphiquement leurs limites.

$f(x) = x$ $\qquad$ $f(x) = x^2$ $\qquad$ $f(x) = x^3$



$\lim\limits_{x \to -\infty} x =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 =$

2.3 Limite finie en $-\infty$

Définition 4 | *Limite finie en* $-\infty$

Soit f une fonction au moins définie sur un intervalle du type $]-\infty, a]$, avec a un réel.

____

____

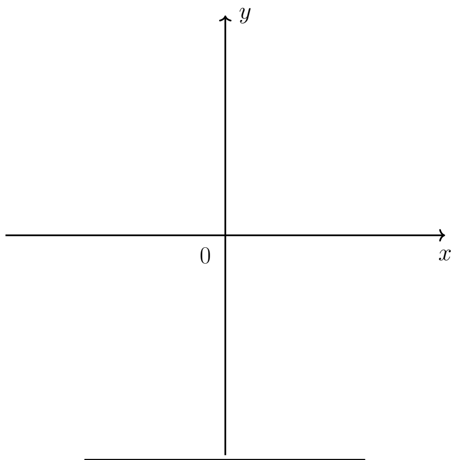
____

____

____

____

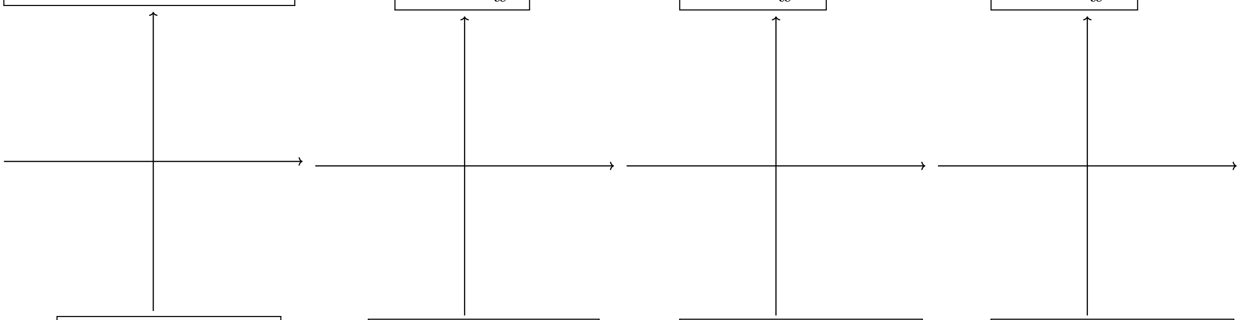
On note :



Cas où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

Exemple 8 — Représenter l'allure des fonctions et déterminer graphiquement leurs limites en $-\infty$.

$f(x) = k$ (k constante) $\qquad$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$



$\lim\limits_{x \to -\infty} k =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} =$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^3} =$

3 Limite d'une fonction en un point fini

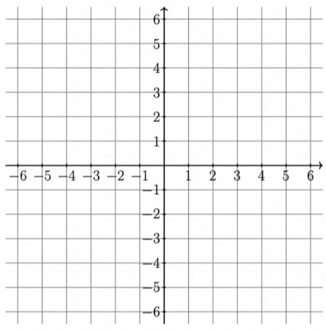
3.1 Premiers exemples

Exemple 9 — ***La fonction inverse en*** 0^+***.*** Que devient $\frac{1}{x}$ lorsque x devient proche de 0 par valeurs supérieures ?

Approche numérique

x	1	0.1	0.01	10^{-10}	10^{-100}
$\frac{1}{x}$					

Approche graphique



Observation : ____________________________________

On dit que : ____________________________________

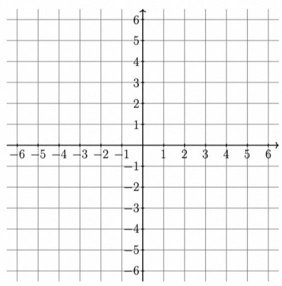
On note :

Exemple 10 — ***La fonction inverse en*** 0^-***.*** Que devient $\frac{1}{x}$ lorsque x devient proche de 0 par valeurs inférieures ?

Approche numérique

x	-1	-0.1	-0.01	-10^{-10}	-10^{-100}
$\frac{1}{x}$					

Approche graphique



Observation : ____________________________________

On dit que : ____________________________________

On note :

3.2 Définitions

Définition 5 | *Limite à gauche*

Soit f une fonction au moins définie sur un intervalle du type $]-\infty, a[$, où a est un réel.

-

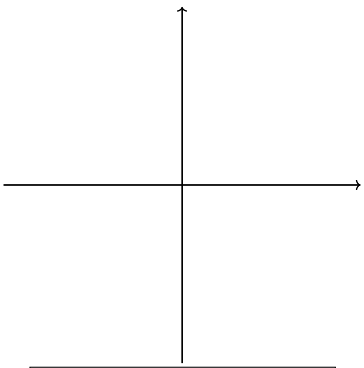
On note :

-

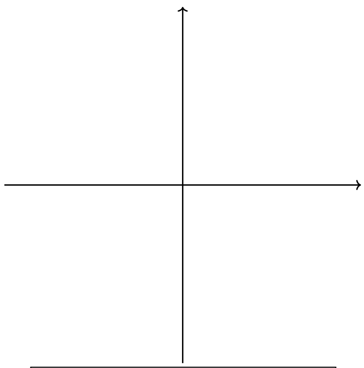
On note :

-

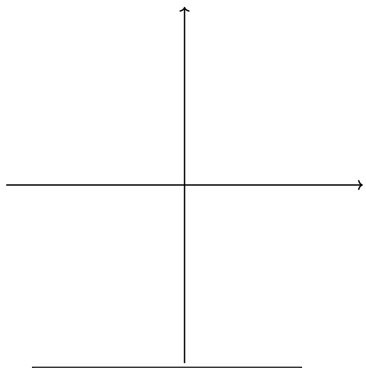
On note :



Cas où $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



Cas où $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$



Cas où $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$

Définition 6 | *Limite à droite*

Soit f une fonction au moins définie sur un intervalle du type $]a, +\infty[$, où a est un réel.

-

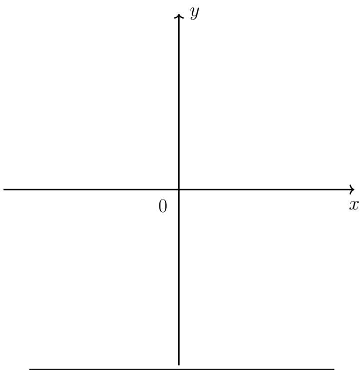
  On note :

-

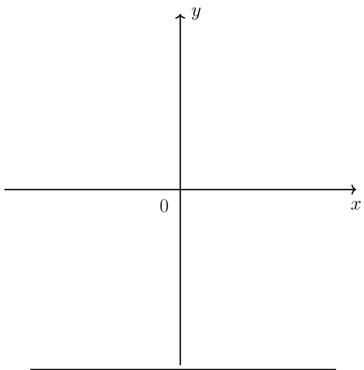
  On note :

-

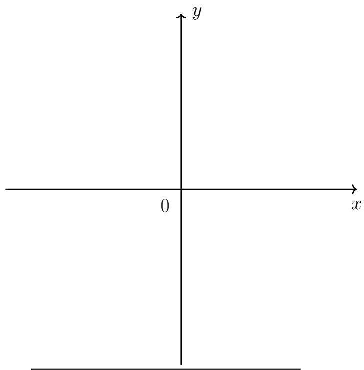
  On note :



Cas où $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$



Cas où $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$



Cas où $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$

■ **Remarque 3.1** — Si f est une fonction définie au voisinage d'un point a, dans le cas où :

on note plus simplement :

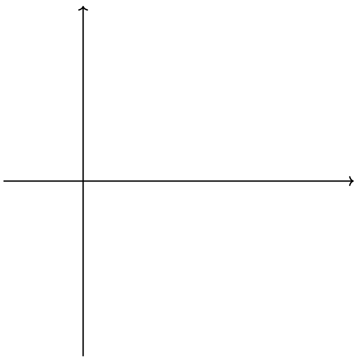
■

3.3 Continuité

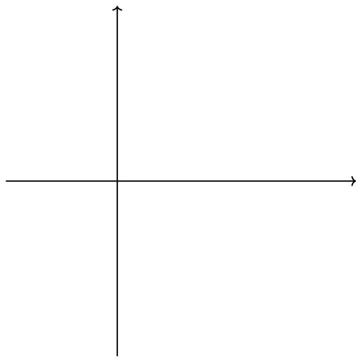
Définition 7 | *Continuité*

Soit f une fonction au moins définie sur un intervalle I.

-
-



Fonction discontinue en a



Fonction continue sur I

Exemple 11 — ***Fonctions continues célèbres***

Remarque 3.2 — Toutes les fonctions que vous connaissez sont continues sur tout intervalle contenu dans le domaine de définition. Retenez que, si f est définie sur I et si $a \in I$ (autrement dit, on peut calculer $f(a)$), alors :

Exemple 12 — On a :

- $\lim\limits_{x \to 3} x^2 - 5 =$
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x} =$
- $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x} =$

4 Récapitulatif des limites usuelles

Attention

Les limites de références ci-après sont à connaître par coeur, ou à retrouver très rapidement.

Fonction	Définie sur	Courbe	Limite en $-\infty$	Limite en 0	Limite en $+\infty$
$x \mapsto c$ $c \in \mathbb{R}$					
$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbb{N}^*$ pair					
$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbb{N}^*$ impair					
$x \mapsto \sqrt{x}$					
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{N}^* pair$					
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $n \in \mathbb{N}^*$ impair					

5 Opérations sur les limites

Les tableaux suivants donnent les limites de fonctions du type kf $(k \in \mathbb{R})$, $f+g$, $f \times g$ ou $\dfrac{f}{g}$ à partir des limites des fonctions f et g.
Ces limites peuvent être des limites en $-\infty$, $+\infty$, ou en un réel a.
Les lettres ℓ et ℓ' désignent des limites finies. L'abréviation « F.I. » signifie « forme indéterminée ». Cela signifie qu'à partir de cette forme, on ne peut pas conclure directement quant à la limite étudiée.

5.1 Multiplication par une constante

Soit k un réel non nul. Dans le tableau ci-dessous, ℓ désigne une limite finie.

Limite de f	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
Limite de kf			

■ **Exemple 13** — Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} -3x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -5x^2$

■

5.2 Limite d'une somme

Dans le tableau suivant, ℓ et ℓ' désignent des limites finies.

Limite de f	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $f+g$						

■ **Exemple 14** — Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^2 - 5x + \dfrac{1}{x}$

■

5.3 Limite d'un produit

Dans le tableau suivant, ℓ et ℓ' désignent des limites finies.

Limite de f	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Limite de g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Limite de $f \times g$									

Exemple 15 — Déterminer : $\lim\limits_{x \to -\infty} x(x+1)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

5.4 Limite d'un quotient

Dans les tableaux suivants, ℓ désigne une limite finie.

Nous allons séparer l'étude de la limite du quotient $\dfrac{f}{g}$ en deux cas.

1er cas. Cas où la limite de g est non nulle. Le tableau est le suivant :

Limite de f	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Limite de g	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
Limite de $\frac{f}{g}$							

2nd cas. Cas où la limite de g est nulle. Le tableau est le suivant :

Limite de f	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
Limite de g	0^+	0^-	0^+	0^-	0
Limite de $\dfrac{f}{g}$					

Exemple 16 — Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+1}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1+\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}^-} \dfrac{1-x}{2x-1}$.

6 Formes indéterminées

Rappel. Les quatre formes indéterminées que vous êtes susceptibles de rencontrer sont les suivantes :

Comment peut-on lever chacune des indéterminations ?

6.1 Polynômes (limite en $\pm\infty$)

Méthode

Exemple 17 — Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 9x$.

6.2 Quotient de polynômes (limite en l'infini)

Méthode

Exemple 18 — Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2+3}{3x^2+x}$

6.3 Exemple dans d'autres cas

Méthode

______

______

______

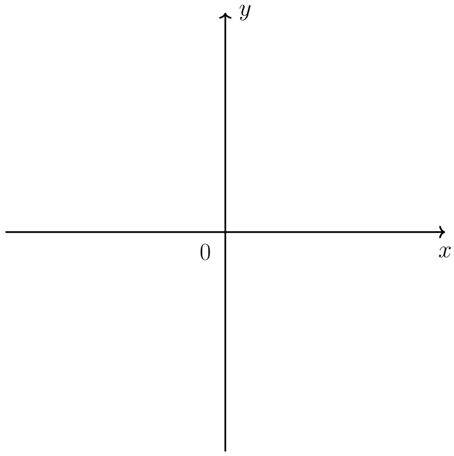
Exemple 19 — Déterminer : $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Exemple 20 — Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}(x^2+1)$.

7 Asymptotes

7.1 Asymptotes horizontales et verticales

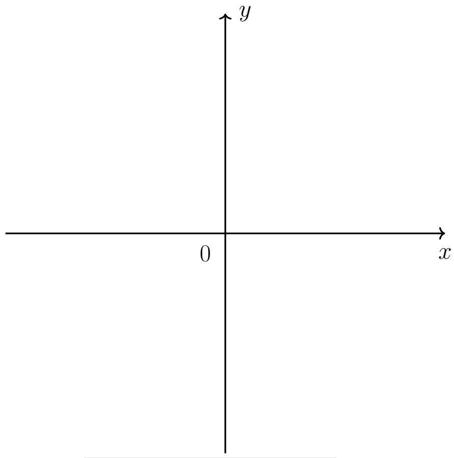
Définition 8 | *Asymptote horizontale*



Asymptote horizontale

Exemple 21 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$. Montrer que la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$.

Définition 9 | *Asymptote verticale*

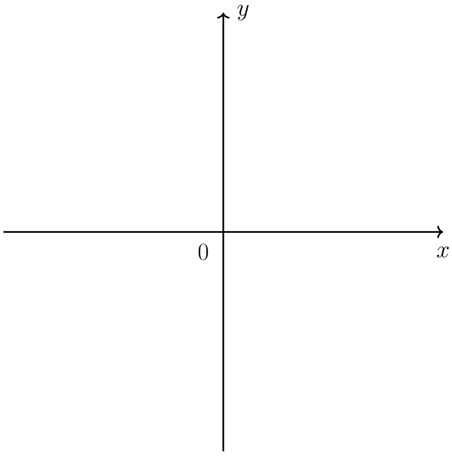


Asymptote verticale

Exemple 22 — Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$. Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est une droite asymptote à $\mathcal{C}_f$.

7.2 Asymptotes obliques

Définition 10 | *Asymptote oblique*



Asymptote oblique

Exemple 23 — Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x - 1}$. Montrer que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f.