CHAPITRE 4

Polynômes de degré deux (partie II)

Rappel. De manière générale, un polynôme de degré deux s'écrit sous la forme

$$P(x) =$$

où a, b et c sont trois réels avec $a \neq 0$.

Tel quel, le polynôme P est écrit sous forme ____________. Le but de ce chapitre consiste en l'étude d'une famille particulière de polynômes de degré deux, ceux qui peuvent s'écrire sous la forme

$$P(x) =$$

où r_1 et r_2 sont deux réels. Dans cette dernière écriture, on dit que le polynôme est écrit sous forme ____________.

Exemple 1 — Soit $x \in \mathbb{R}$. Développons la quantité $2(x-1)(x+3)$. On a

$$\begin{aligned} 2(x-1)(x+3) &= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ &= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ &= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{aligned}$$

donc :

Nous verrons que l'écriture factorisée permet de nombreux avantages - on peut facilement :

- ____
- ____
- ____
- ____

1 Racine d'un polynôme

Définition 1 | *Racine d'un polynôme*

Soit f un polynôme de degré deux défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois réels avec $a \neq 0$.

Remarque 1.1 —

Exercice 1 Soit f le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

1 — Montrer que 1 est racine de f.

2 — Montrer que -3 est racine de f.

Exercice 2 Soit f le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4(x-2)(x+1)$.

1 — Montrer que 2 est racine de f.

2 — Montrer que -1 est racine de f.

En réalité, les racines d'un polynôme factorisé sont assez « faciles » à trouver.

Proposition 1 | *Racines du polynôme* $x \mapsto a(x - r_1)(x - r_2)$

Preuve

Supposons que $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ avec $a \neq 0$. On a :

Remarque 1.2 — Si $r_1 = r_2$, on a $f(x) = a(x - r_1)(x - r_1) = a(x - r_1)^2$.
On dit alors que r_1 est une racine $\boxed{}$ du polynôme f.

Exercice 3 Soit f le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x - 2)(x - 5)$. Trouver les racines de f.

Exercice 4 Soit g le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 75(x - 2)(x + 4)$. Trouver les racines de g.

Exercice 5 Soit h le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -2(x - 1)^2$. Trouver les racines de h.

Exercice 6 Soit k le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 0,005x(x + 56)$. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_k$ avec l'axe des abscisses.

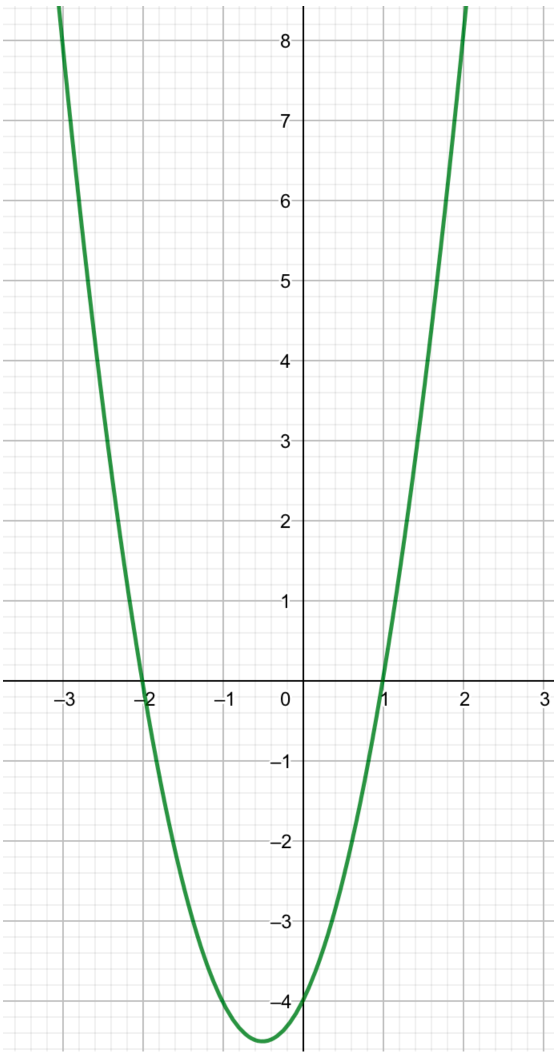
2 Propriétés graphiques et variations de $x \mapsto a(x - r_1)(x - r_2)$

Traitons deux exemples avant de généraliser.

Exemple 2 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-1)(x+2)$.

- Les racines r_1 et r_2 de f sont $r_1 =$ et $r_2 =$
- Notons $p = \frac{r_1 + r_2}{2}$. On a $p =$ et $f(p) =$

Ci-dessous le graphe de f.



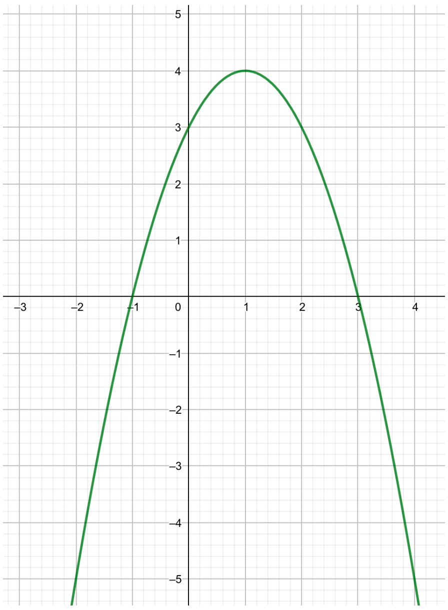
Observations :

- Le graphe de la fonction f est une
- Le sommet S de la parabole a pour coordonnées
- Un axe de symétrie pour $\mathcal{C}_f$ est la droite d'équation
- La fonction f est strictement décroissante sur et strictement croissante sur
- La fonction f possède un atteint lorsque

Exemple 3 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(x+1)(x-3)$.

- Les racines r_1 et r_2 de f sont $r_1 =$ et $r_2 =$
- Notons $p = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$. On a $p =$ et $f(p) =$

Ci-dessous le graphe de f.

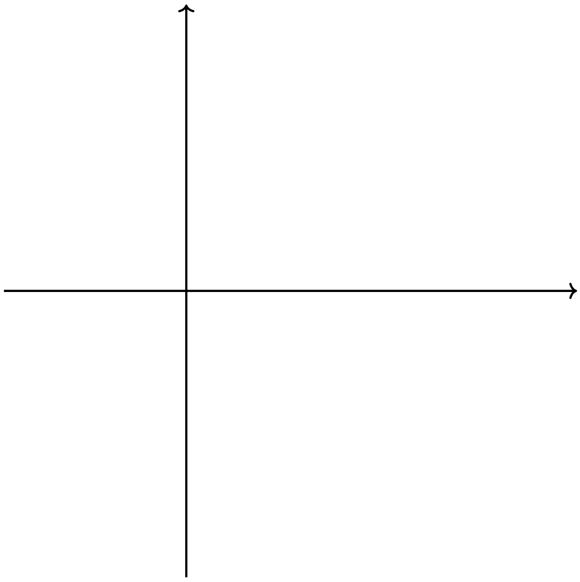


- Le graphe de la fonction f est une
- Le sommet S de la parabole a pour coordonnées
- Un axe de symétrie pour $\mathcal{C}_f$ est la droite d'équation
- La fonction f est strictement décroissante sur et strictement croissante sur
- La fonction f possède un atteint lorsque

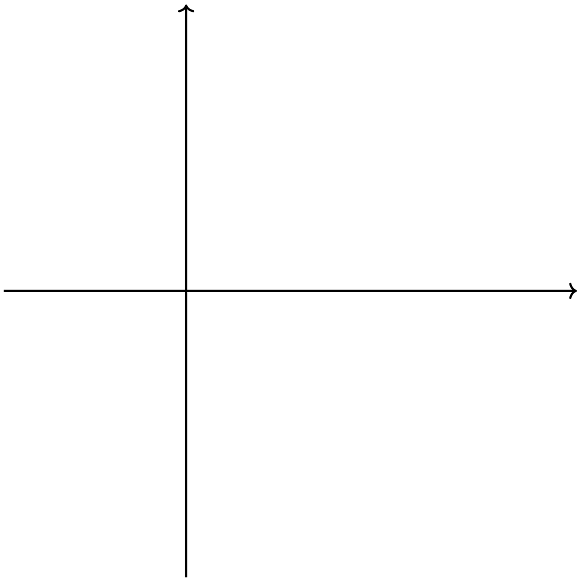
Proposition 2

Soit f un polynôme de degré deux défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$, avec $a \neq 0$ et r_1 et r_2 deux réels distincts. Notons $p =$

- Le graphe de f est une de sommet
- La droite d'équation est un axe de symétrie pour $\mathcal{C}_f$.
- Si $a > 0$, ______________________
- Si $a < 0$, ______________________



Cas où $a > 0$



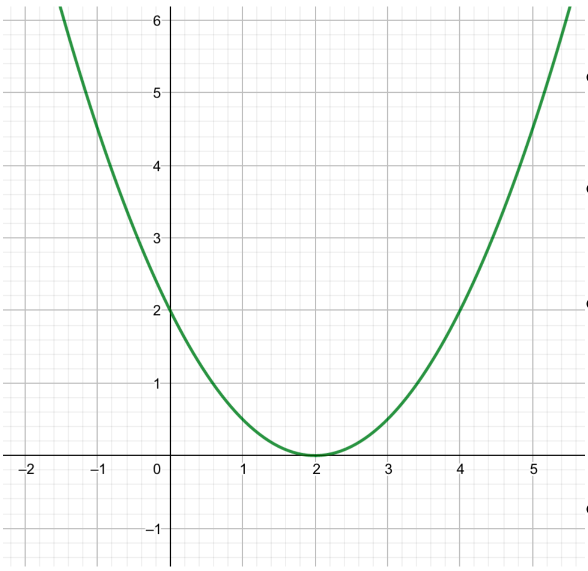
Cas où $a < 0$

Mais que se passe-t-il en présence d'une racine double ?

Exemple 4 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$.

- La racine double r_0 de f est $r_0 =$

Ci-dessous le graphe de f.

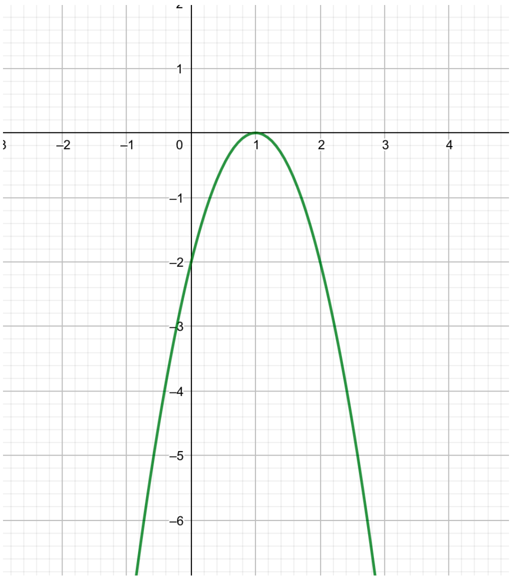


- Le graphe de la fonction f est une
- Le sommet S de la parabole a pour coordonnées
- Un axe de symétrie pour $\mathcal{C}_f$ est la droite d'équation
- La fonction f est strictement décroissante sur et strictement croissante sur
- La fonction f possède un atteint lorsque

Exemple 5 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x-1)^2$.

- La racine double r_0 de f est $r_0 =$

Ci-dessous le graphe de f.



- Le graphe de la fonction f est une
- Le sommet S de la parabole a pour coordonnées
- Un axe de symétrie pour $\mathcal{C}_f$ est la droite d'équation
- La fonction f est strictement décroissante sur et strictement croissante sur
- La fonction f possède un atteint lorsque

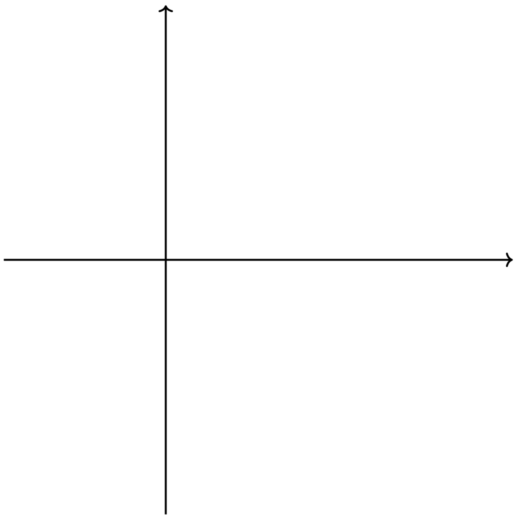
Proposition 3

Soit f un polynôme de degré deux défini sur $\mathbb{R}$ par

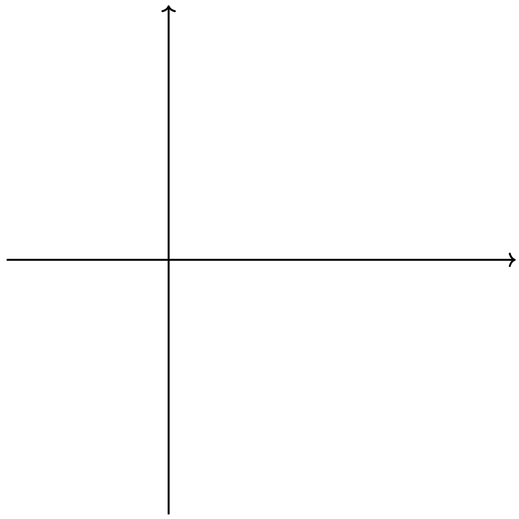
$$f(x) = a(x-r_0)^2,$$

avec $a \neq 0$ et r_0 un réel.

- Le graphe de f est une de sommet
- La droite d'équation est un axe de symétrie pour $\mathcal{C}_f$.
- Si $a > 0$, __________
- Si $a < 0$, __________



Cas où $a > 0$



Cas où $a < 0$

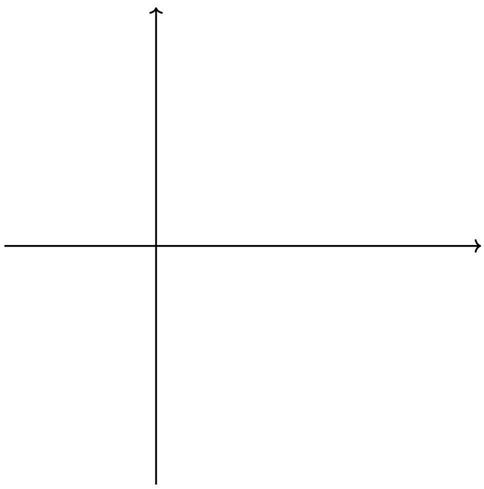
3 Signe d'un polynôme du type $x \mapsto a(x - r_1)(x - r_2)$

3.1 Le cas où les deux racines sont distinctes

Soit f un polynôme de degré deux défini par $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$, avec $a \neq 0$ et $r_1 < r_2$.
Suivant le signe de a, deux tableaux de signes pour f sont possibles.

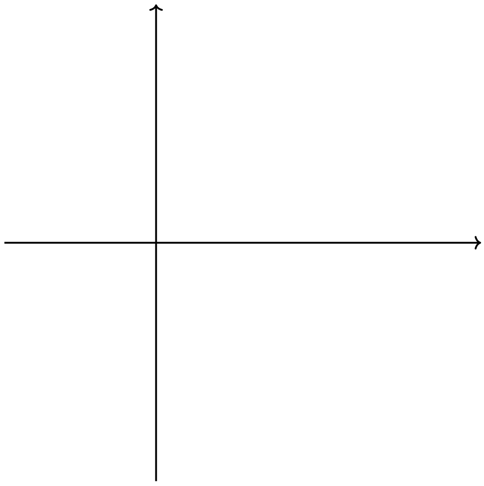
1er cas : on a $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ où $\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$	r_1	r_2	$+\infty$
a				
$x - r_1$				
$x - r_2$				
$f(x)$				



2nd cas : on a $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ où $\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$	r_1	r_2	$+\infty$
a				
$x - r_1$				
$x - r_2$				
$f(x)$				



Remarque 3.1 — Les deux tableaux de signes précédents peuvent se retenir grâce à ce seul tableau :

et à la phrase suivante :

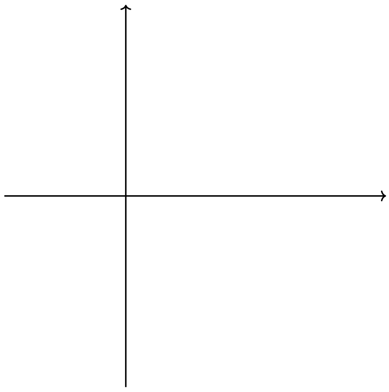
Exemple 6 — Donner le tableau de signes de $f(x) = 2(x - 1)(x + 3)$.

3.2 Le cas d'une racine double

Soit f un polynôme de degré deux défini par $f(x) = a(x - r_0)^2$, avec $a \neq 0$ et r_0 un réel.
Suivant le signe de a, deux tableaux de signes pour f sont possibles.

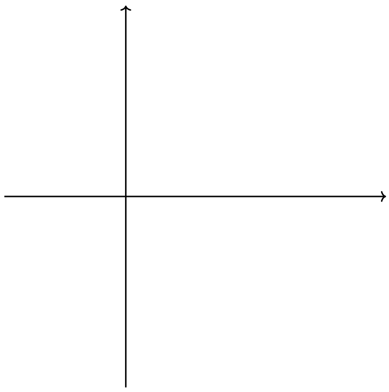
1er cas : on a $f(x) = a(x - r_0)^2$ où $\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$	r_0	$+\infty$
a			
$(x - r_0)^2$			
$f(x)$			



2nd cas : on a $f(x) = a(x - r_0)^2$ où $\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$	r_0	$+\infty$
a			
$(x - r_0)^2$			
$f(x)$			



4 Factorisation d'un polynôme de degré deux

Théorème 1 | *Factorisation, Version 1*

Soit f un polynôme de degré deux défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois réels avec $a \neq 0$.

- ____
  ____

  $f(x) =$

- ____
  ____
  ____

  $f(x) =$

Exercice 7 Soit f le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

1 — Montrer que 1 et -3 sont racines de f.

2 — En déduire une forme factorisée pour f.

3 — Vérifier, en développant la forme factorisée obtenue, que l'on obtient bien la forme développée.

Théorème 2 | *Factorisation, Version 2*

Soit f un polynôme de degré deux défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois réels avec $a \neq 0$.

Exercice 8 Soit f le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 6x + 8$.

1 — Montrer que -1 est racine de f.

2 — En déduire une forme factorisée pour f.