CHAPITRE 5

Polynômes de degré trois

Rappelons qu'un polynôme de degré deux est une fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P(x) =$$

où a, b et c sont trois réels avec $a \neq 0$.
De manière analogue, un polynôme de degré $\boxed{\text{trois}}$ est une fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P(x) =$$

où a, b, c et d sont trois réels avec $a \neq 0$.

Exemple 1 — Les fonctions P, Q et R définies sur $\mathbb{R}$ par

$P(x) =$ $\qquad$ $Q(x) =$ $\qquad$ et $R(x) =$

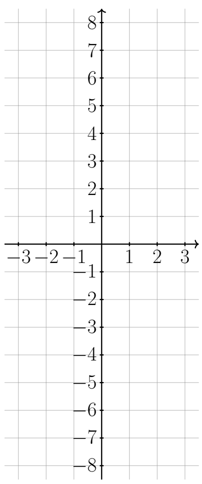
sont des polynômes de degré trois.

Le nouveau programme se propose d'étudier deux classes particulières de polynômes de degré trois :

-
-

1 Polynômes du type $x \mapsto ax^3 + b$

1.1 Polynômes du type $x \mapsto ax^3$



Rappelons en premier lieu l'allure et les variations de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3$$

La fonction $x \mapsto x^3$ est

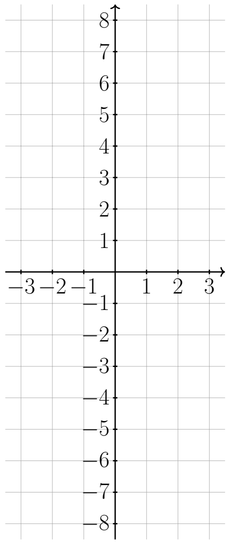
Qu'en est-il des fonctions $x \mapsto ax^3$, où a est un nombre réel non-nul ?

Exemple 2 — Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 \qquad \text{et} \qquad g(x) = -x^3$$

Complétez le tableau de valeurs suivant et tracez les graphes des fonctions sur le même graphique.

x	-3	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	3
$f(x)$									
$g(x)$									



- La fonction $x \mapsto \frac{1}{4}x^3$ est ______
- La fonction $x \mapsto -x^3$ est ______

Les deux exemples précédents dressent l'ensemble des allures possibles pour une fonction du type $x \mapsto ax^3$ avec $a \neq 0$.

Proposition 1 | *Variations de $x \mapsto ax^3$*

______

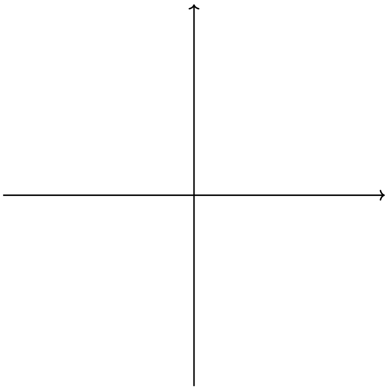
______

______

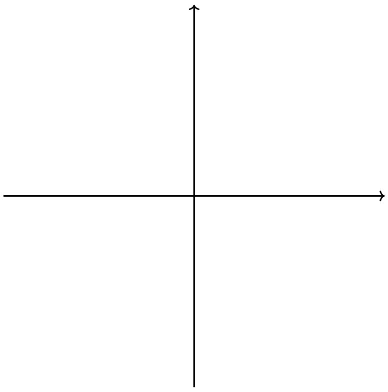
- ______

  ______
- ______

  ______



Cas où $a > 0$



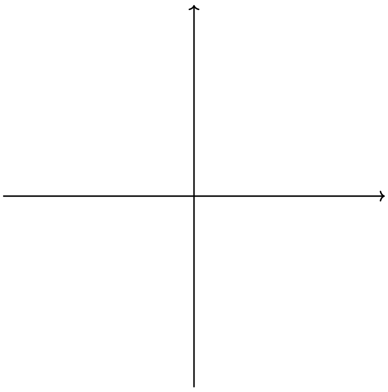
Cas où $a < 0$

1.2 Polynômes du type $x \mapsto ax^3 + b$

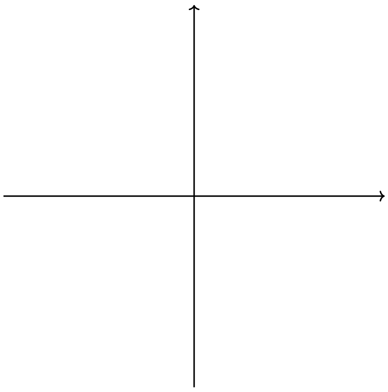
Soient a et b deux réels, avec $a \neq 0$. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \qquad\qquad \text{et} \quad g(x) =$$

Comme pour les polynômes de degré deux,



Cas où $a > 0$



Cas où $a < 0$

Proposition 2 | *Variations de $x \mapsto ax^3 + b$*

-
-

2 Etude des polynômes factorisés $x \mapsto a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$

2.1 Racine d'un polynôme de degré trois

Définition 1 | *Racine d'un polynôme*

Soit f un polynôme de degré trois défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c et d sont trois réels avec $a \neq 0$.

Remarque 2.1 —

Exercice 1 Soit f le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

1 — Montrer que 1 est racine de f.

2 — Montrer que 2 est racine de f.

3 — Montrer que 3 est racine de f.

Exercice 2 Soit f le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4(x+10)(x-5)(x+2)$.

1 — Montrer que -10 est racine de f.

2 — Montrer que 5 est racine de f.

3 — Trouver une troisième racine de f.

A l'instar du degré deux, les racines d'un polynôme de degré trois factorisé sont assez « faciles » à trouver.

Proposition 3 | *Racines du polynôme* $x \mapsto a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$

____

____

____

Preuve

Supposons que $f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$ avec $a \neq 0$. On a :

Remarque 2.2 — Supposons que $f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$.

- Si $r_1 = r_2$, on a $f(x) = a(x-r_1)(x-r_1)(x-r_3) = a(x-r_1)^2(x-r_3)$.

  On dit alors que r_1 est une racine $\boxed{}$ du polynôme f.
- Si $r_1 = r_2 = r_3$, on a $f(x) = a(x-r_1)(x-r_1)(x-r_1) = a(x-r_1)^3$.

  On dit alors que r_1 est une racine $\boxed{}$ du polynôme f.

Exercice 3 Soit f le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7(x-1)(x+5)(x-3)$. Trouver les racines de f.

____

____

Exercice 4 Soit g le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3(x+2)^2(x-5)$. Trouver les racines de g.

____

____

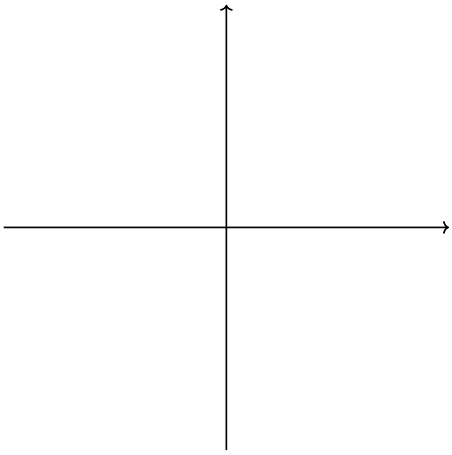
Exercice 5 Soit h le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 95(x-2)^3$. Trouver les racines de h.

____

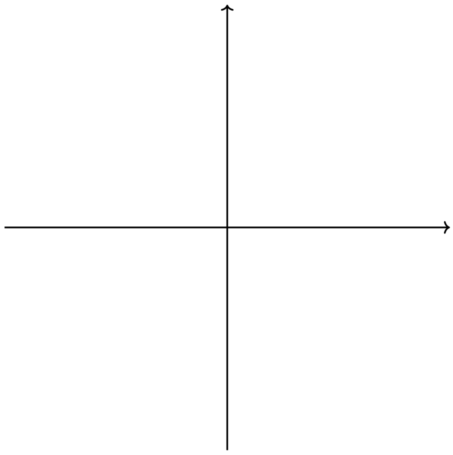
____

2.2 Propriétés graphiques de $x \mapsto a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$

Soit f un polynôme de degré trois défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$, avec $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3$.

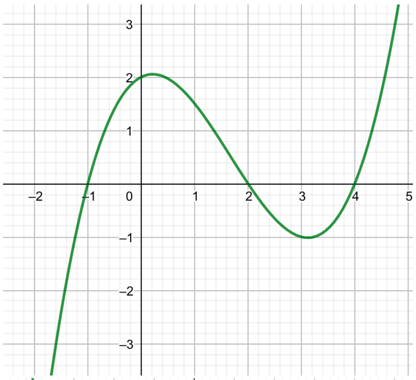


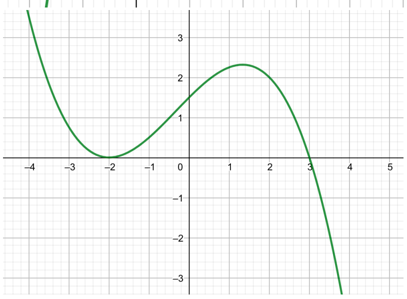
Cas où $a > 0$



Cas où $a < 0$

Exemple 3 — On donne ci-dessous deux graphes de deux polynômes de degré trois. Compter le nombre de racines et donner leur valeur pour chacune des deux fonctions.





2.3 Signe de $x \mapsto a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$

L'expression factorisée d'un polynôme de degré trois permet d'obtenir facilement le tableau de signes de ce polynôme.

Exercice 6 Soit f le polynôme de degré trois défini sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -2(x-4)(x+3)(x-1)$$

1 — Quelles sont les racines de f ?

2 — Compléter le tableau de signes suivant.

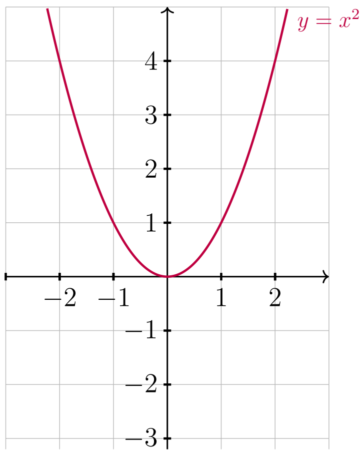
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
-2	
$x-4$	
$x+3$	
$x-1$	
$f(x)$	

3 Complément : équations $x^2 = k$ et $x^3 = k$

3.1 Equation $x^2 = k$, avec $k > 0$

Proposition 4 | *Equation $x^2 = k$*

Soit $k > 0$.



Preuve

■ **Exercice 7** Soit $x \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation : $x^2 = 25$

■ **Remarque 3.1 —** Si $k < 0$, ____________________

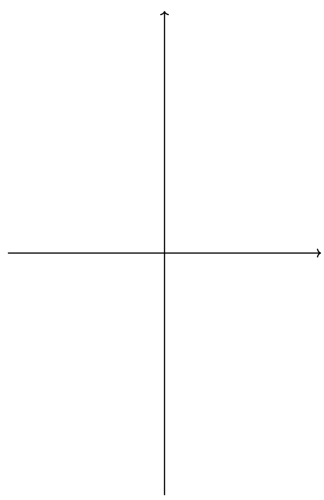
____________________ ■

3.2 Equation $x^3 = k$

Proposition 5 | *Equation* $x^3 = k$

Soit $k > 0$. ____________________

____



■ **Exercice 8** Soit $x \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation : $x^3 = 8$

■ **Exercice 9** Soit $x \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation : $x^3 = 27$