

# Primitives d'une fonction

---



---



---



---

## 1 Primitives d'une fonction sur un intervalle

### 1.1 Qu'est-ce qu'une primitive ?

#### Définition 1 | Une primitive

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On dit que  $F$  est **une** primitive de  $f$  sur  $I$  si  $F$  est dérivable sur  $I$  et vérifie, pour tout  $x \in I$ ,

$$F'(x) = f(x)$$

■ **Exemple 1** — Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x + 1$ .

- **Une** primitive de  $f$  est la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) =$

En effet :

- Une autre primitive de  $f$  est la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $G(x) =$

■

■ **Exemple 2** — Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \cos(x)$ .

- **Une** primitive de  $f$  est la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) =$

En effet :

- Une autre primitive de  $f$  est la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $G(x) =$

■

En réalité, l'ensemble de toutes les primitives d'une fonction s'obtient en rajoutant une constante quelconque à **une** primitive connue.

## 1.2 Ensemble de toutes les primitives d'une fonction

La connaissance d'une primitive d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  permet de trouver toutes les primitives. C'est ce qu'affirme le théorème qui suit.

### Théorème 1 | Ensemble des primitives d'une fonction

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

■ **Exemple 3** — Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = 3x^2$$

■

## 1.3 Primitive prenant une valeur donnée en un réel donné

### Proposition 1 | Primitive d'une fonction prenant une valeur donnée

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  admettant des primitives.

Alors, \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_  
 \_\_\_\_\_

■ **Exercice 1** Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = -\frac{1}{x^2} + 2x$

- 1 — Trouver **une** primitive  $F$  de  $f$  sur  $]0; +\infty[$
- 2 — En déduire l'ensemble de toutes les primitives de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- 3 — Déterminer l'unique primitive de  $f$  prenant la valeur 3 en 1.

## 1.4 Tableau de primitives usuelles

On peut déterminer la primitive d'une fonction usuelle par lecture inverse du tableau de dérivée ou en utilisant le tableau suivant.

Fonction $x \mapsto f(x)$	Une primitive $x \mapsto F(x)$	Domaine de définition
$a$ (constante)		
$x$		
$x^2$		
$x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ , $n \geq 1$		
$\frac{1}{x^2}$		
$x^n$ où $n \neq -1$ est un entier relatif		
$\cos x$		
$\sin(x)$		
$\cos(ax + b)$		
$\sin(ax + b)$		

### Exercice 2

- 1 — Trouver une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2019$
- 2 — Trouver une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^9$
- 3 — Trouver une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin(x)$
- 4 — Trouver une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \cos(5x + 9)$
- 5 — Trouver une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{x^3}$

## 2 Opérations avec les primitives

### 2.1 Addition et multiplication par une constante

#### Proposition 2 | Somme de primitives

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$ , et soit  $k$  un réel.  
Soient  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ , et  $G$  une primitive de  $g$  sur  $I$ .

Alors :

- Une primitive de  $f + g$  sur  $I$  est \_\_\_\_\_
- Une primitive de  $kf$  sur  $I$  est \_\_\_\_\_



#### Attention

Comme pour la dérivation, \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

#### Exercice 3

1 — Déterminer une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$  sur  $]0; +\infty[$ .

2 — Déterminer une primitive de  $f : x \mapsto x^2 + 5 \cos(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

3 — Déterminer une primitive de la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = -6 \cos(2x + 1)$

4 — Déterminer une primitive de  $j : t \mapsto 2t^2 + 3t^3 - \sin(t)$  sur  $\mathbb{R}$ .

## 2.2 Primitives de $u'u^n$

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $n$  un entier positif.

Le tableau suivant donne les primitives de  $u'u^n$  et de  $\frac{u'}{u^n}$  (sous certaines conditions). Il peut s'obtenir en utilisant les formules de dérivation vues au chapitre précédent.

Forme de la fonction	Une primitive	Condition
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{N}$		
$\frac{u'}{u^n} = u'u^{-n}$ avec $n \neq 1$		

### Exercice 4

1 — Déterminer une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x(x^2 - 1)^7$

2 — Déterminer une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \cos(x) \times \sin^2(x)$

3 — Déterminer une primitive de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^3}$

## ■ 3 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 2 | *Théorème fondamental de l'analyse*