CHAPITRE 1

Suites géométriques

Notation | *Ensembles d'entiers*

- On note $\mathbb{N}$ ______________________________
- Si $n_0 \in \mathbb{N}$, on note ______________________________

____

1 Quelques rappels sur les suites réelles

Définition 1 | *Suite réelle*

Une **suite réelle** est ______________________________

____

____

On dit que :

- ______________________________
- ______________________________

Exemple 1 —
La suite $(u_n)_{n\geqslant}$ définie par $u_n = n^2 + 1$ a pour premier terme __________
La suite $(u_n)_{n\geqslant}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$ a pour premier terme __________

Attention

Une suite peut être essentiellement définie de deux manières :

1. De manière **explicite**. ______________________________

   ____

   ____

   Exemple 2 — Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 - 5n$. Que vaut u_3 ?
   On a $u_3 =$ ____________________

2. De manière **récursive**. ____

____

____

■ **Exemple 3 —** Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -2u_n + 3 \end{cases}$$

Que vaut u_3 ?

■

En T^ale STL BIO, le programme cible l'étude des suites *géométriques* qui possèdent à la fois une définition récursive et explicite.

2 Suites géométriques : généralités

Définition 2 | *Suite géométrique, définition récursive*

On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite **géométrique** si il existe un réel q de sorte que, pour tout entier naturel n, on a

$$\boxed{u_{n+1} = \qquad\qquad}$$

Le réel q est appelé **raison** de la suite.

Autrement dit, étant donnée (u_n) une suite **géométrique** de raison q, pour obtenir u_{n+1} à partir de u_n, il suffit de multiplier u_n par sa raison q.

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_3 \arrow[r, bend left, "\times q"] & \cdots \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_n \end{tikzcd}$$

On obtient ainsi une expression *explicite* pour une suite géométrique de raison q.

Proposition 1 | *Suites géométriques, formulation explicite*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{u_n = \qquad\qquad}$$

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $q = 3$.

1 — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.

2 — Calculer u_5.

1. ____

2. ____

Beaucoup d'exercices sur les suites géométriques utilisent une modélisation via l'utilisation de pourcentages. Soyez à l'aise !

Méthode

Autour des pourcentages. Soit x un nombre réel.

- Augmenter une quantité de $x\%$, c'est la multiplier par

  Par exemple, augmenter une quantité de 21%, c'est la multiplier par
- Diminuer une quantité de $x\%$, c'est la multiplier par

  Par exemple, diminuer une quantité de 3%, c'est la multiplier par

Exemple 4 — ***D'après BAC STL BIO 2019.*** Julie achète un bambou dont la taille augmente de 35 % chaque année. On note h_n la taille du bambou obtenue n années après l'achat, sachant que la hauteur initiale du bambou vaut $0,6$ m.

1. Donner la valeur de h_0, puis calculer h_1.
2. Pour un entier naturel n, exprimer h_{n+1} en fonction de h_n.
3. En déduire la nature[1] de la suite (h_n), puis exprimer h_n en fonction de n.
4. Quelle est la taille du bambou au bout de 6 ans ?

1. ____

____

2. ____

____

3. ____

____

4. ____

____

1. Le programme du bac STL BIO se limite essentiellement aux suites géométriques. Ainsi, dans un exercice portant sur les suites, si l'on vous demande la *nature* d'une suite, répondez (en le justifiant) qu'elle est *géométrique* !

Attention

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, la valeur de u_0 n'existe pas toujours et le premier terme de la suite considéré est parfois u_1.
Dans ce cas, pour $n \geqslant 1$, on a

$$\boxed{u_n = \qquad\qquad}$$

$$\begin{tikzcd}
u_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_3 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_4 \arrow[r, bend left, "\times q"] & \cdots \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_n
\end{tikzcd}$$

De manière plus générale, si p et n sont deux entiers avec $n \geqslant p$, on a

$$\boxed{u_n = \qquad\qquad}$$

$$\begin{tikzcd}
u_p \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_{p+1} \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_{p+2} \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_{p+3} \arrow[r, bend left, "\times q"] & \cdots \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_n
\end{tikzcd}$$

Exercice 2 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite géométrique et de raison $q = 2$ avec $u_1 = 3$.

1 — Pour un entier $n \geqslant 1$, exprimer u_n en fonction de n.

2 — Calculer u_6.

1. ____

2. ____

Exercice 3 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de raison q.

1 — Exprimer u_7 en fonction de u_3.

2 — Exprimer u_{18} en fonction de u_2.

1. ____

2. ____

2.1 Montrer qu'une suite est géométrique

Méthode

Comment montrer qu'une suite est géométrique ?

Cas 1.

Cas 2.

Exemple 5 — La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3 \times 5^n$ est-elle géométrique ?

Méthode

Comment montrer qu'une suite n'est pas géométrique ?

Exemple 6 — La suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = n^2$ est-elle géométrique ?

3 Limite d'une suite géométrique

Chercher la limite d'une suite, c'est ____

____

3.1 Suite possédant une limite infinie

Définition 3 | *Limite égale à* $+\infty$

____

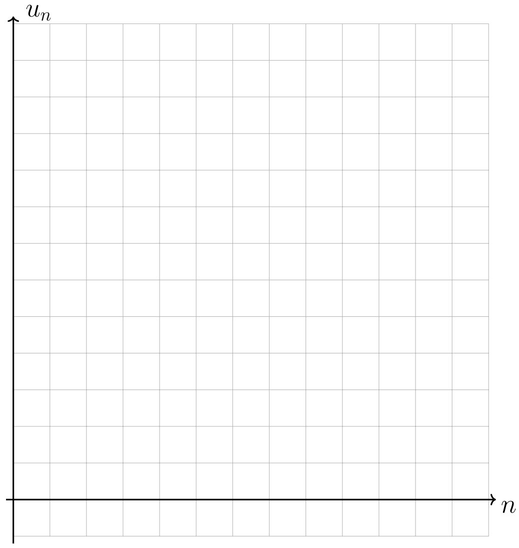
____

____

____

____

On note :



Exemple 7 — ***Une limite égale à* $+\infty$.** Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_n = n^2$. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	10^2	10^3	10^{10}
u_n										

On note :

$$\lim_{n\to\infty} n^2 =$$

Définition 4 | *Limite égale à* $-\infty$

____

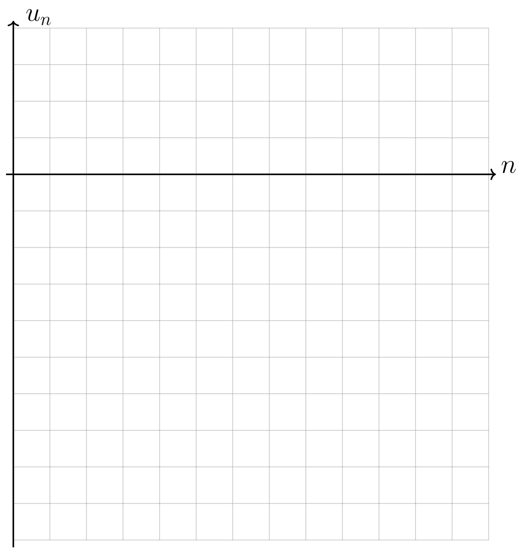
____

____

____

____

On note :



■ **Exemple 8 —** ***Une limite égale à*** $-\infty$. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_n = -n^2$. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	100	10^3	10^{10}
u_n										

On note :

$$\lim_{n\to+\infty}(-n^2) =$$

■

3.2 Suite possédant une limite finie

Définition 5 | *Limite finie*

____

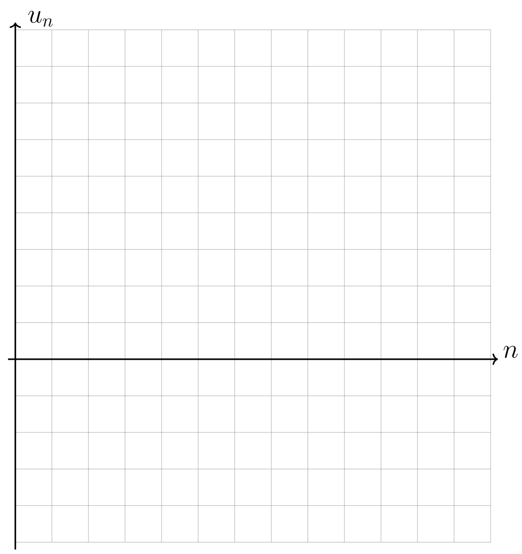
____

____

____

____

On note :



■ **Exemple 9 —** Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$. Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	10	10^2	10^3	10^5	10^{10}
u_n										

On note :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} =$$

■

Concernant les suites, le programme officiel du bac STL BIO n'étudie que les limites des suites géométriques.

3.3 Limite de $(q^n)_{n\geqslant 0}$, où $q > 0$

Soit $q \geqslant 0$. Quel est le comportement de q^n lorsque n est grand ? Autrement dit, que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$?

Exemple 10 — Compléter le tableau suivant

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
$(0,5)^n$									
1^n									
2^n									

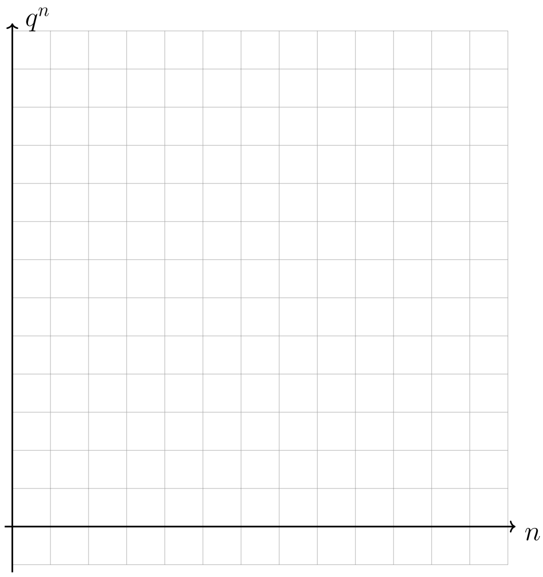
On a :

$$\lim_{n\to+\infty} (0,5)^n = \qquad , \quad \lim_{n\to+\infty} 1^n = \qquad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} 2^n =$$

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Proposition 2 | *Limite de $(q^n)_{n\geqslant 0}$*

Soit q un nombre réel positif. On a :



Exemple 11 — On a :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n =$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (1,001)^n =$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,999)^n =$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{7}\right)^n =$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{5^n} =$

La proposition précédente se généralise pour l'étude d'une limite d'une suite géométrique.

3.4 Limite d'une suite géométrique

Proposition 3 | *Limite d'une suite géométrique*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de premier terme non nul u_0 et de raison positive q.

Preuve

Exemple 12 — On a :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} -5\times 3^n =$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n =$
- Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=-300$ et de raison $q=0.97$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n =$$
- Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=3$ et de raison $q=1.05$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n =$$
- Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0=2$ et de raison $q=1$, alors
$$\lim_{n\to+\infty} u_n =$$

4 Algorithmes de seuil (version CASIO)

4.1 Cas $q > 1$

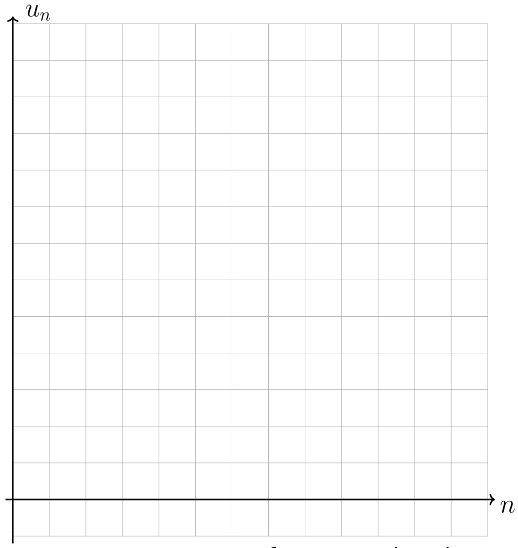
Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 1$, avec $u_0 > 0$. On a ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} = \qquad\qquad}$$

Ainsi, étant donné un seuil $S > 0$, il existe un entier n^* de sorte que

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

Etant donné un seuil $S > 0$, le but d'un algorithme de seuil consiste à trouver le premier entier entier n^* de sorte que $u_{n^*} > S$ (ou bien $u_{n^*} \geqslant S$).



Pour établir un tel algorithme, on utilise la relation de récurrence portant sur la suite géométrique.

Exemple 13 — Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1,3$.

On a : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} = \qquad\qquad}$ car : ____

Soit $S = 12345$ un seuil. Recherchons le premier entier n^* de sorte que $u_{n*} > 12345$.
Notons que la suite (u_n) satisfait, pour tout entier n,

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1,3u_n \end{cases}$$

L'algorithme se seuil en langage naturel est ainsi le suivant :

```
N ← [   ]
U ← [   ]
Tant que U ⩽ [      ]
   N ← [      ]
   U ← [   ] × U
Fin Tant que
Renvoyer N
```

Algorithme de seuil

Programmons en CASIO cet algorithme de seuil permettant de déterminer le premier entier n^* de sorte que $u_{n^*} > 12345$. Voici la méthode :

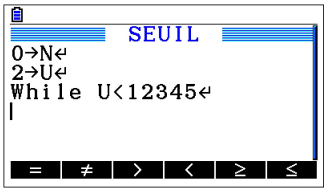
Rentrer dans le menu programme.

- Aller dans le menu PRGM de votre calculatrice.
- Créer un nouveau programme à l'aide de la touche NEW (donnez lui par exemple le nom « SEUIL » grâce aux touches alphanumériques).

Initialisation des variables N et U.

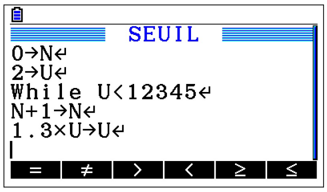
- $\boxed{0}$ $\boxed{\to}$ $\boxed{N}$ puis EXE (N : indice de la suite)
- $\boxed{2}$ $\boxed{\to}$ $\boxed{U}$ puis EXE (U : valeur de la suite)

Saisie de l'instruction « Tant que »



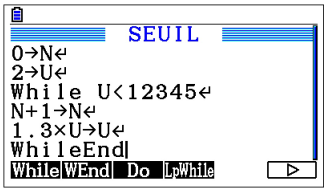
- Aller dans le menu PRGM (programmation) en tapant SHIFT puis VARS.
- Aller dans le menu COM (ou COMMAND). Faire défiler à droite deux fois . Saisir While, puis $\boxed{U}$.
- La touche < s'obtient dans l'onglet REL (ou RELATN) du menu PRGM (faire SHIFT VARS pour y accéder). Saisir le seuil par la suite, puis EXE.

Traitement de l'instruction



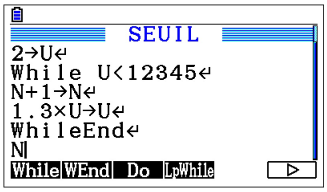
- $\boxed{N}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\to}$ $\boxed{N}$ puis EXE (N augmente de 1)
- $\boxed{U}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{1.3}$ $\boxed{\to}$ $\boxed{U}$ puis EXE (U est multiplié par 1.3)

Fin de l'instruction « Tant que »



- Aller dans le menu PRGM (programmation) en tapant SHIFT puis VARS.
- Aller dans le menu COM. Faire défiler à droite deux fois grâce à ▷. Saisir WEnd. , puis EXE.

Affichage de l'indice permettant de dépasser le seuil

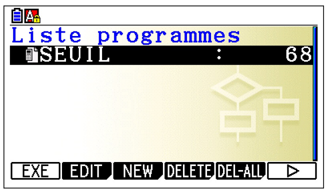


- Inscrire $\boxed{N}$.

Quitter le mode de programmation

- Touche EXIT trois fois

Execution du programme



- Aller dans le menu PRGM
- Executer le programme crée SEUIL grâce à EXE.

Le résultat tant attendu apparait ! On obtient : $\boxed{n^* = \quad}$. Ainsi :

4.2 Cas où $0 < q < 1$.

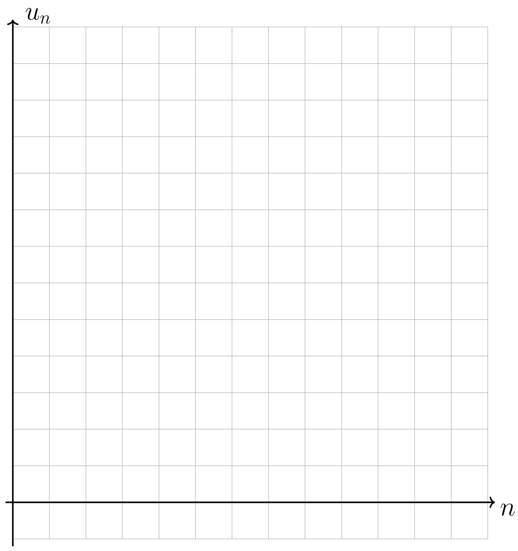
Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in [0,1[$, avec $u_0 > 0$. On a ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \quad = \qquad\qquad}$$

Ainsi, étant donné un seuil $S > 0$, il existe un entier n^* de sorte que

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

Etant donné un seuil $S > 0$, le but d'un algorithme de seuil consiste à trouver le premier entier entier n^* de sorte que $u_{n^*} < S$ (ou bien $u_{n^*} \leqslant S$).



Exemple 14 — Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite géométrique de premier terme $u_1 = 50$ et de raison $q = 0,8$. On a : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \quad = \qquad\qquad}$ car : ______________________________________

Soit $S = 2$ un seuil. Recherchons le premier entier n^* de sorte que $u_{n*} \leqslant 2$.
Notons que la suite (u_n) satisfait, pour tout entier n,

$$\begin{cases} u_1 = 50 \\ u_{n+1} = 0,8u_n \end{cases}$$

L'algorithme se seuil en langage naturel est ainsi le suivant :

N ← $\square$
U ← $\square$
Tant que U > $\square$
    N ← $\square$
    U ← $\square$ × U
Fin Tant que
Renvoyer N

Algorithme de seuil

Programmer cet algorithme en CASIO. Quel est le résultat obtenu ?

5 Somme des termes d'une suite géométrique

5.1 Symbole somme

Définition 6 | *Symbole Σ*

Soit (u_n) une suite. Soit n un entier naturel.

Remarque 5.1 — Jargon. La quantité $\sum_{i=0}^{n} u_i$ se lit :

« »

et cette somme contient ______________________________________

Exemple 15 — On a

- $\sum_{i=0}^{6} 2^i =$

- $\sum_{i=0}^{5} (-3)^i =$

Remarque 5.2 — Plus généralement, si ℓ et p sont deux entiers, on note

$$\sum_{i=\ell}^{p} u_i =$$

et cette somme contient ______________________________________

Exemple 16 — On a

- $\sum_{i=2}^{6} 2^i =$

- $\sum_{i=3}^{5} (-3)^i =$

5.2 Somme de puissances successives

Proposition 4 | *Somme de puissances successives*

Soit q un réel, avec $\boxed{q \neq 1}$. Alors, pour tout entier naturel n, on a

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n =$$

Preuve

Remarque 5.3 — Si $q = 1$, alors on a simplement

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n =$$

Exemple 17 — Calculer la valeur de la somme $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 2^{10}$.

Exemple 18 — Calculer la valeur de la somme $T = \sum_{i=0}^{5} \frac{1}{3^i}$.

5.3 Somme des termes d'une suite géométrique

Proposition 5 | *Somme des termes d'une suite géométrique*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de raison q, avec $\boxed{q \neq 1}$. Alors, on a

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n =$$

Preuve

Exemple 19 — Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Calculer

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_9$$

Proposition 6 | *Somme des termes d'une suite géométrique, généralisation*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite géométrique de raison q, avec $\boxed{q \neq 1}$.
Alors, pour tous entiers ℓ et p avec $\ell \leqslant p$, on a

$$\sum_{i=\ell}^{p} u_i = u_\ell + u_{\ell+1} + \cdots + u_p =$$

Remarque 5.4 — La proposition précédente peut se retenir comme suit :

Exemple 20 — Soit u la suite géométrique de premier terme $u_5 = 4$ et de raison $q = 2$. Calculer

$$S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{13}$$

Exemple 21 — Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison q. Calculer

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$