Chapitre 1 : Polynômes du second degré (Forme canonique, variations)

Exercices

■ Exercice 1 *Identifier les coefficients d'un trinôme*

Indiquez si chacune des fonctions f, g, h, i, j, k, définies sur $\mathbb{R}$, est un polynôme du second degré. Dans l'affirmative, précisez les coefficients du trinôme.

- $f(x) = x^2 - 5x + 2$
- $g(x) = (3x+4)^2$
- $h(x) = (3x-2)^2 - 9x^2$
- $i(x) = x(x-1)(x+1)$
- $j(x) = \dfrac{x^2+6x+1}{3}$
- $k(x) = 2(x-1)(x+3) - 4x$

■ Exercice 2 *Forme canonique (niveau 1)*

Soient f, g et h les trinômes définis sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 6x + 1, \quad g(x) = x^2 - 4x + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = x^2 + x + 1.$$

Déterminer la forme canonique de chacun des trinômes **en utilisant la méthode de complétion du carré, puis une autre méthode au choix**.

■ Exercice 3 *Forme canonique (niveau 2)*

Soient f, g, h et m les trinômes définis sur $\mathbb{R}$ par

- $f(x) = 2x^2 + 6x + 1$
- $g(x) = -x^2 + 3x - 2$
- $h(x) = 4x^2 + x - 6$
- $m(x) = -7x^2 + 14x + 8$

Déterminer la forme canonique de chacun des trinômes **en utilisant uniquement la méthode de complétion du carré**.

■ Exercice 4 *Utilisation de la forme canonique (niveau 1)*

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + 4x + 9$.

1 — Déterminer la forme canonique du polynôme P.

2 — En déduire que l'équation $x^2 + 4x + 9 = 0$ n'admet aucune solution réelle.

3 — En utilisant la forme la plus adaptée de $P(x)$ (développée ou canonique), calculez rapidement les nombres suivants :

(a) $P(0)$ **(b)** $P(-2)$ **(c)** $P(\sqrt{2} - 2)$

■ Exercice 5 *Utilisation de la forme canonique (niveau 2)*

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -3x^2 + 6x + 1$.

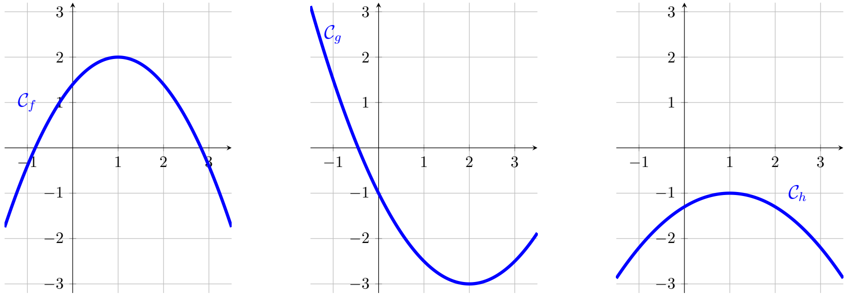
1 — Déterminer la forme canonique du polynôme P.

2 — En utilisant la forme la plus adaptée de $P(x)$ (développée ou canonique), résoudre sur $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

(a) $P(x) = 1$ **(b)** $P(x) = 4$ **(c)** $P(x) = -23$

■ Exercice 6 *Allure de la parabole*

Pour chaque trinôme représenté ci dessous, déterminer graphiquement les coordonnées du sommet de la parabole et le signe du coefficient dominant.



■ Exercice 7 *Déterminer la parabole connaissant un point et le sommet*

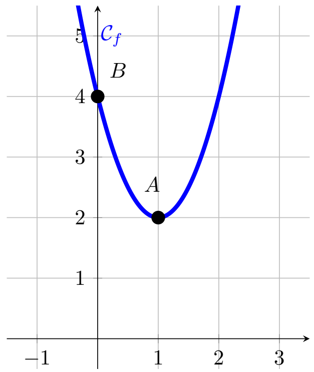
Considérons une parabole qui admet pour sommet le point $(2;1)$ et qui passe par le point $(1;3)$. Déterminer l'expression du trinôme f qui correspond à cette parabole.

■ Exercice 8 *Déterminer la parabole connaissant un point et le sommet*

Soit f le polynôme du second degré dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1 — Déterminer la forme canonique de f.

2 — Déduisez-en la forme développée de f.



Exercice 9 — *Variations d'un trinôme*

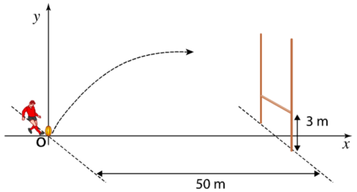
Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ **(b)** $g(x) = -2(x+1)^2 - 3$

(c) $h(x) = (4-2x)(x-3)$ **(d)** $m(x) = 2x^2 + 7$

Exercice 10 — *Rugby*

Au moment du coup de pied, le ballon de rugby se trouve au sol, en O, face aux poteaux de pénalités à une distance de 50 mètres. Le buteur le fait partir dans le plan (xOy) avec un angle de 50° par rapport au sol, horizontal. Les lois de la physique permettent de modéliser la trajectoire du ballon par un arc de la courbe d'équation $y = -0,02x^2 + 1,19x$ (y mesure en mètres la hauteur du ballon pour une distance au sol de x mètres).



1 — La pénalité est réussie si le ballon passe au dessus de la barre. Le buteur a-t-il marqué la pénalité ?

2 — Jusqu'à quelle hauteur le ballon s'est-il élevé ?

3 — A quelle distance derrière la ligne de but le ballon est-il retombé à terre ?

Exercice 11 — *Identification de courbes*

On a représenté les courbes de cinq fonctions : f, g, h, k et m définies sur $\mathbb{R}$ par

- $f(x) = x^2 - 6x + 8$
- $g(x) = -2x^2 + 2x + 1$
- $h(x) = 2x - 1$
- $k(x) = (x-1)^2 + 3$
- $m(x) = x^2 + 4x + 4$

Associer à chaque courbe, la fonction qui lui correspond, en justifiant.

Exercice 12 — *Axe de symétrie*

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$.

1 — Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

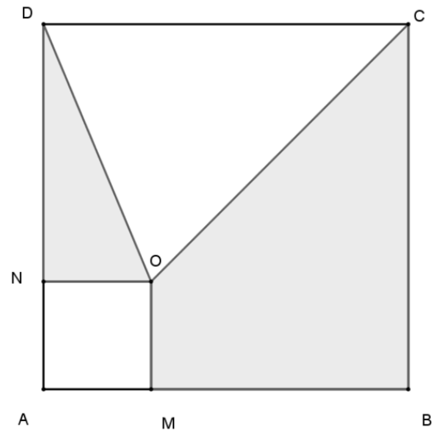
2 — Où se situe l'axe de symétrie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f ?

3 — Compléter sans calcul ce tableau de valeurs, puis tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$		-3		5			-13

Exercice 13 — *Optimisation*

$ABCD$ est un carré de côté 10 cm et M est un point de $[AB]$ (distinct de A et de B) et $AMON$ est un carré de côté x.



1 — Montrer que l'aire grise (en cm^2) s'écrit $-x^2 + 5x + 50$.

2 — Où placer le point M pour obtenir la plus grande aire grise possible ? Que vaut alors l'aire grise ?

Exercice 14 — *Une touche de Python* ☺

On donne ci-contre, le programme incomplet d'une fonction Python. Compléter ce programme afin que la fonction retourne les coordonnées du sommet de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

```
def sommet(a,b,c):
    alpha = ......
    beta = ......
    return alpha,beta
```