CHAPITRE 1

Polynômes du second degré - Forme canonique et variations

1 Fonction carré (rappels de 2nde)

1.1 Carré d'un nombre

Définition 1 | *Carré d'un nombre*

Le carré d'un nombre réel a .....

Remarque — Si $a > 0$, le nombre a^2 est l'aire d'un *carré* de côté a.

Il est important de connaître les quelques carrés « remarquables » suivants :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x^2																

Remarque — Soit $x \in \mathbb{R}$. Comment se simplifie $(-x)^2$? Pourquoi ?

.....

.....

Exemple 1 — Que vaut $(-5)^2$? A-t-on $(-5)^2 = -5^2$?

.....

.....

1.2 Carré d'un produit et d'un quotient

Proposition 1

Soient a et b deux nombres réels. On a :

$$(ab)^2 = \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \text{——} \ (\text{si } b \neq 0)$$

Preuve

Exemple 2 — Soit x un nombre réel. On a

$$(4x)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{et} \qquad 9x^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 3 — On a : $\left(\frac{7}{9}\right)^2 = \qquad$ et $\qquad \left(-\frac{3}{11}\right)^2 =$

Exemple 4 — Si x est un nombre réel, on a : $\left(\frac{5}{6}x\right)^2 =$

1.3 Identités remarquables

Proposition 2 | ♥ *Identités remarquables* ♥

Pour tous réels a et b,

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque — Il est bon de savoir utiliser ces identités remarquables « dans les deux sens ».

Exemple 5 — Soit x un nombre réel. Développer chacune des expressions suivantes :

$(x+1)^2 =$

$(2x+3)^2 =$

$\left(\frac{3}{7}x+5\right)^2 =$

$(x-1)^2 =$

$(3x-7)^2 =$

$\left(\frac{1}{2}x-15\right)^2 =$

$(x-1)(x+1) =$

$(2x-5)(2x+5) =$

$\left(\frac{8}{7}x-2\right)\left(\frac{8}{7}x+2\right) =$

Exemple 6 — Soit x un nombre réel. Factorisez les expressions suivantes :

$x^2+2x+1 =$

$4x^2+4x+1 =$

$\frac{x^2}{9}+\frac{2x}{3}+1 =$

$x^2-2x+1 =$

$x^2-6x+9 =$

$x^2-8x+16 =$

$x^2-1 =$

$x^2-25 =$

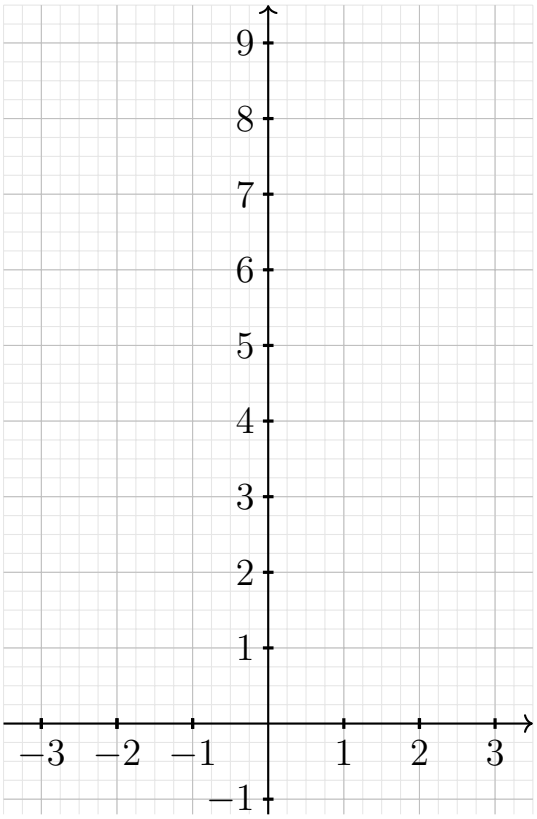
$9-4x^2 =$

1.4 Courbe représentative de la fonction carré

Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Ci-dessous un tableau de valeurs de la fonction carré en vue de dresser sa courbe représentative.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x)$											

- .....
  .....
  .....
  .....
  .....
- .....
  .....
  .....
  .....
  .....



1.5 Variations de la fonction carré

Proposition 3 | *Variations de la fonction carré*

La fonction carré est : $\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$

Preuve

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

On en déduit le tableau de variations de la fonction carré :

x	
$f(x)$	

2 Polynômes du second degré : définition

Définition 2 | *Polynôme du second degré*

Soient a, b, c trois nombres réels **avec** $a \neq 0$.

On appelle .....

.....

.....

.....

.....

.....

Remarque — Dans la définition précédente :

- .....

  .....

- .....

- .....

Exemple 7 — Donner pour chacun des trinômes f, g, h, i et j, k définis sur $\mathbb{R}$, les coefficients a, b et c :

- $f(x) = 2x^2 + 3x + 7$ Ici : $a =$ ... , $b =$ ... et $c =$ ...
- $g(x) = x^2 + 2,7x - 1$ Ici : $a =$ ... , $b =$ ... et $c =$ ...
- $h(x) = -x^2 + 6$ Ici : $a =$ ... , $b =$ ... et $c =$ ...
- $i(x) = -3x^2 - 8x$ Ici : $a =$ ... , $b =$ ... et $c =$ ...
- $j(x) = 6x - \frac{1}{2}x^2 + 9$ Ici : $a =$ ... , $b =$ ... et $c =$ ...
- $k(x) = x^2$ Ici : $a =$ ... , $b =$ ... et $c =$ ...

OBJECTIF DU CHAPITRE : .....

.....

.....

3 La forme canonique

3.1 Méthode de complétion du carré

Exemple 8 — Soit x un nombre réel.

$x^2 + 10x =$

$x^2 - 6x =$

En règle générale, on a :

Proposition 4 | *Complétion du carré*

Pour tous nombres réels k et x,

..... et .....

Preuve

Exemple 9 — Soit x un nombre réel.

$x^2 + 12x =$

$x^2 - x =$

$x^2 + 7x =$

3.2 La forme canonique

Proposition 5 | *Forme canonique*

Tout trinôme P .....

.....

.....

$$P(x) = \text{.....}$$

avec $\alpha =$ et $\beta =$

Cette écriture .....

.....

Preuve

Il n'est pas nécessaire de maîtriser cette démonstration en première lecture.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exemple 10 — Soit f le trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 12x + 10$.
Déterminons sa forme canonique *via* trois méthodes différentes.

METHODE 1 : en utilisant une complétion du carré (à maîtriser)

Etape 1 : .....

.....

Pour tout nombre réel x, $f(x) =$

Etape 2 : .....

Pour tout nombre réel x,

$f(x) =$ .....

$=$ .....

Etape 3 : .....

.....

Pour tout nombre réel x,

$f(x) =$ .....

$=$ .....

$=$ .....

Conclusion : Pour tout nombre réel x, $f(x) =$ où $a = \ldots$, $\alpha = \ldots$ et $\beta = \ldots$

$$\boxed{\textbf{\textit{METHODE 2 : en calculant}}\ \alpha = -\frac{b}{2a}\ \textbf{\textit{puis}}\ \beta = f(\alpha)}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$$\boxed{\textbf{\textit{METHODE 3 : en calculant}}\ \alpha = -\frac{b}{2a}\ \textbf{\textit{puis}}\ \beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

■ **Exemple 11** — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $2x^2 + 12x + 10 = 0$ en utilisant la forme canonique précédente.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4 Variations de $x \mapsto ax^2 + bx + c$

4.1 Variations

Proposition 6 | ♥ *Variations d'un trinôme* ♥

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré ($a \neq 0$). Posons .....

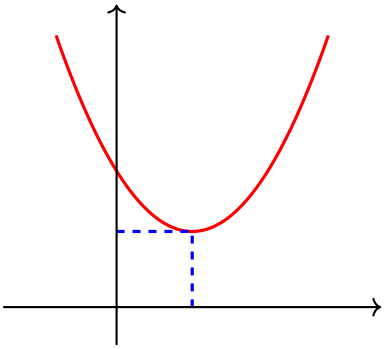
.....

① .....

.....

.....

.....



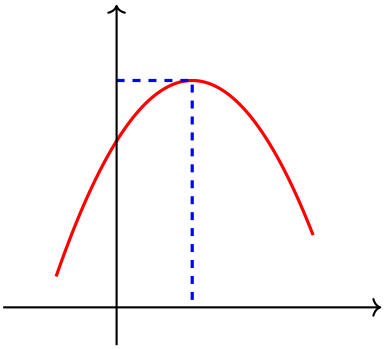
x	
$f(x)$	

② .....

.....

.....

.....



x	
$f(x)$	

Dans les deux cas, ...

.....

Preuve

Démontrons cette proposition dans le cas où $a > 0$.

Exemple 12 — Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-5)^2 - 13$

Exemple 13 — Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3(x+6)^2 + 7$

Exemple 14 — Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

4.2 Axe de symétrie

Proposition 7 | *Axe de symétrie*

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du second degré ($a \neq 0$).

Posons .....

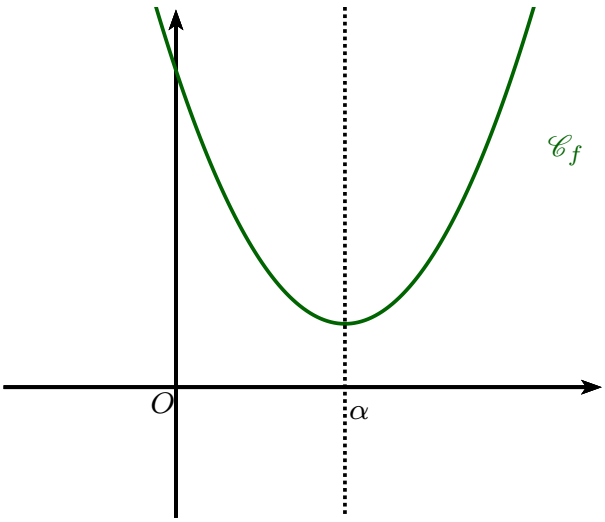
.....

.....

.....

.....

.....



Preuve

CHAPITRE 2

Equations du second degré

1 Equations du second degré

1.1 Premières définitions

Définition 1 | *Equation du second degré*

On appelle *équation du second degré* .....

.....

.....

Exemple 1 —

- .....

  .....

- .....

  .....

  .....

OBJECTIF DE LA SECTION : .....

.....

.....

Définition 2 | *Racine*

Soit f un trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$).

On appelle *racine* de f .....

.....

.....

.....

.....

Exercice 1 Soit f le trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x - 6$.

1 — Montrer que 2 est une racine de f.

.....

.....

.....

2 — Le nombre -1 est-il racine de f ?

.....

.....

.....

Exercice 2 Trouvez l'expression d'un polynôme du second degré admettant 3 et -1 comme racines.

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 3 Indiquez (en justifiant) si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

« *Tout polynôme du second degré admet au moins une racine réelle* ».

.....

.....

.....

.....

.....

1.2 Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$, où $a \neq 0$

Rappel : Soit f un polynôme de degré deux défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$).

.....

.....

.....

.....

Définition 3 | *Discriminant d'un trinôme*

Le réel .....

.....

Le théorème suivant indique que le signe de Δ permet de trouver le nombre de solutions de

Théorème 1 | ♥ ♥ ♥ ♥ *Solutions de l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ ♥ ♥ ♥ ♥

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.
Considérons l'équation

$$(E) : \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1er cas .....

.....

2nd cas .....

.....

3ème cas .....

.....

Remarque — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, et notons $\Delta = b^2 - 4ac$.

- .....

  .....

- .....

  .....

- .....

  .....

Preuve

Exemple 2 — Dans votre cahier d'exercices, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $2x^2 + x - 1 = 0$ **(b)** $x^2 - 3x + 1 = 0$ **(c)** $0,3x^2 - 3x + 7,5 = 0$

(d) $4x^2 + x + 1 = x^2 - x - 5$ **(e)** $x(8 - x) + 1 = 0$

1.3 Résumé des différentes situations

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			
Racines			

2 Cas où le calcul de Δ est inutile pour trouver les racines

Considérons l'équation (E) : $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont trois réels ($a \neq 0$).

2.1 Cas où $c = 0$

Dans le cas où $c = 0$, l'équation s'écrit : (E) : .....

.....

.....

.....

.....

Exemple 3 — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4x^2 - 13x = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

2.2 Cas où $b = 0$

Dans le cas où $b = 0$, l'équation s'écrit : (E) : .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Proposition 1 | *Equation $x^2 = k$ (k réel)*

Soit k un nombre réel.

- .....

  .....

  .....

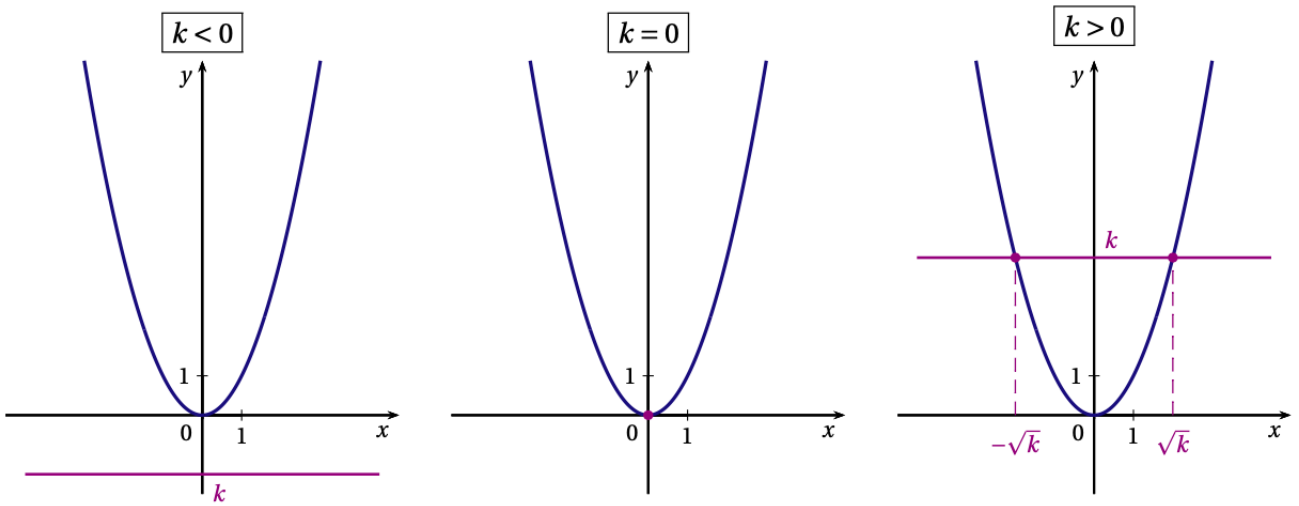
- .....

  .....

- .....

  .....

  .....



$x^2 = k$ n'a pas de solution — $x^2 = 0$ a pour unique solution 0 — $x^2 = k$ a deux solutions $-\sqrt{k}$ ou $\sqrt{k}$

Exemple 4 — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - 50 = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.3 Cas où l'on peut factoriser

En cas de facteur commun apparent, une factorisation permet de résoudre efficacement l'équation.

Exemple 5 — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $x^2 - 16 - (x-4)(x+3) = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.4 Racines « évidentes ». Relations coefficients-racines

Proposition 2 | *Somme et produit des racines*

Soit f un trinôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$).

.....

.....

.....

.....

Preuve

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

■ **Remarque —** .....

.....

.....

.....

.....

■ **Exercice 4** Soit f le trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

1 — Trouver mentalement une racine de f.

.....

.....

.....

2 — En déduire l'autre racine de f (à l'aide de deux méthodes).

■ **Exercice 5** Trouver mentalement une solution de l'équation : $x^2 - 2021x - 2022 = 0$, puis en déduire une autre solution.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

CHAPITRE 4

Probabilités : rappels de seconde

1 Expériences aléatoires : langage des probabilités

Définition 1 | *Expérience aléatoire*

Une expérience est dite **aléatoire** lorsque ses résultats dépendent du hasard.

On appelle **issue** d'une expérience aléatoire tout résultat de cette expérience.

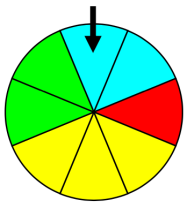
L'ensemble des issues est appelé **univers**. On le note généralement Ω (se lit « Oméga »)

Exemple 1 — ***(Lancé de dé)*** On lance un dé cubique équilibré et on s'intéresse au nombre obtenu sur sa face supérieure.
Cette expérience a donc ..... issues. L'univers associé à cette expérience est

$$\Omega = \{ \quad ; \quad ; \quad ; \quad ; \quad ; \quad \}$$

Exemple 2 — ***(Tirer une carte)*** On tire au hasard une carte parmi un jeu de 32 cartes et on s'intéresse à cette carte. Cette expérience a ..... issues. L'univers est l'ensemble des 32 cartes.

Exemple 3 — ***(Roue)*** On fait tourner une roue marquée sur ses secteurs de couleurs différentes et on regarde la couleur du secteur marqué par la flèche.



L'univers associé à cette expérience est $\Omega =$

Définition 2 | *Evènements*

Tout ensemble d'issues est appelé **évènement**.

Un évènement qui contient une seule issue est appelé **évènement élémentaire**.

Un évènement qui contient toutes les issues est appelé **évènement certain**. On le note Ω.

Un évènement qui ne contient aucune issue est appelé **évènement impossible**. On le note $\emptyset$.

Exemple 4 —

① Le lancer de dé

- Evènement élémentaire :
  « obtenir 4 »
- Evènement :
  « obtenir un chiffre pair »
- Evènement impossible :
  « obtenir 7 »

② Le jeu de 32 cartes

- Evènement élémentaire :
  .....
  .....
- Evènement :
  .....
  .....
- Evènement impossible :
  .....
  .....

③ La roue colorée :

- Evènement élémentaire :
  .....
  .....
- Evènement :
  .....
  .....
- Evènement impossible :
  .....
  .....

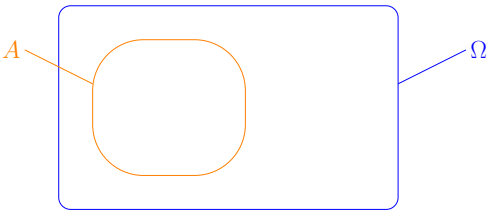
2 Opérations sur les évènements

2.1 Evènement contraire

Définition 3 | *Evènement contraire*

Soit A un évènement d'un univers Ω.

L'**évènement contraire** de l'évènement A, noté $\overline{A}$, contient tous les éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.



Remarque : $\overline{A}$ se prononce : « A barre ».

Exemple 5 — Une classe de seconde est constituée de filles et de garçons. Les élèves sont âgés de 14 à 16 ans. On interroge un élève au hasard. Soient A et B les évènements :

- A : « L'élève interrogé est une fille »
- B : « L'élève a 15 ans »

L'évènement $\overline{A}$ est : .....

L'évènement $\overline{B}$ est : .....

Exemple 6 — On lance un dé cubique équilibré. Soit A l'évènement : « obtenir au moins trois »

L'évènement $\overline{A}$ est : .....

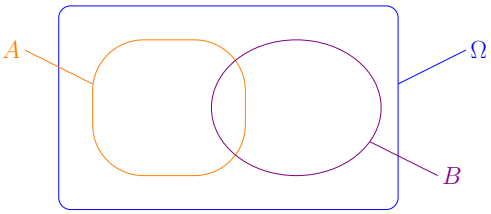
Remarque : Soit A un évènement d'un univers Ω. On a :

$\overline{\overline{A}} =$ $\qquad$ $\overline{\Omega} =$ $\qquad$ et $\overline{\emptyset} =$

2.2 Intersection de deux évènements

Définition 4 | *Intersection*

L'**intersection** de A et B est l'évènement noté $A \cap B$.
Il contient les éléments appartenant à la fois à A et à B.



Remarque : $A \cap B$ se prononce : « A inter B ».

Exemple 7 — On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Soient A et B les évènements :

- A : « Obtenir un coeur »
- B : « Obtenir une dame »

L'évènement $A \cap B$ est : .....

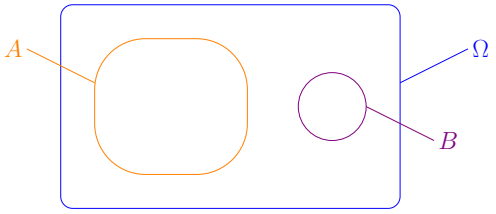
Exemple 8 — Une classe de seconde est constituée de filles et de garçons. Les élèves sont âgés de 14 à 16 ans. On interroge un élève au hasard. Soient A et B les évènements :

- A : « L'élève interrogé est une fille »
- B : « L'élève a 15 ans »

L'évènement $A \cap B$ est : .....

Définition 5 | *Evènements incompatibles*

Deux évènements A et B d'un univers Ω sont **incompatibles** lorsqu'ils n'ont aucune issue en commun.
On note alors $\boxed{A \cap B = \emptyset}$



Exemple 9 — On lance un dé cubique équilibré. Soient A et B les évènements :

- A : « Obtenir 2 ou 4 »
- B : « Obtenir un nombre impair »

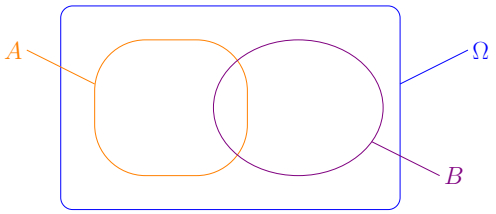
Les évènements A et B sont incompatibles, ce qui se note $A \cap B = \emptyset$.

2.3 Réunion de deux ensembles

Définition 6 | *Union*

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω.

La **réunion** de A et B est l'évènement noté $A \cup B$.
Il contient les éléments appartenant à A ou à B (*ou aux deux !*).



Remarque : $A \cup B$ se prononce : « A union B ».

Exemple 10 — On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Soient A et B les évènements :

- A : « Obtenir un coeur »
- B : « Obtenir une dame »

L'évènement $A \cup B$ est : .....

Exemple 11 — Une classe de seconde est constituée de filles et de garçons. Les élèves sont âgés de 14 à 16 ans. On interroge un élève au hasard. Soient A et B les évènements :

- A : « L'élève interrogé est une fille »
- B : « L'élève a 15 ans »

L'évènement $A \cup B$ est : .....

3 Probabilité d'un évènement

3.1 Définition axiomatique d'une probabilité

Définition 7 | *Probabilité*

Soit Ω un univers. Une probabilité P sur Ω est une fonction qui fait correspondre à tout évènement A de Ω un nombre réel noté $P(A)$ et qui vérifie les propriétés suivantes :

- ***Axiome 1.*** .....

  .....

  .....

- ***Axiome 2.*** .....

  .....

  .....

- ***Axiome 3.*** .....

  .....

  .....

Ces axiomes vont nous permettre de démontrer les formules vues en seconde (voir section 4), du type $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ou encore $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, etc.

3.2 Situations d'équiprobabilité

Définition 8 | *Equiprobabilité*

On considère une expérience aléatoire d'un univers Ω.

On est dans une **situation d'équiprobabilité** lorsque tous les évènements élémentaires sont équiprobables, c'est-à-dire qu'ils ont tous la même probabilité.

Exemple 12 — Lorsqu'on lance un dé cubique **équilibré**, lorsqu'on tire **au hasard** une carte dans un jeu de 32 cartes, on est dans une situation d'équiprobabilité.
En situation d'équiprobabilité, les calculs se probabilités sont relativement simples :

Proposition 1 | *Calcul de probabilités en cas d'équiprobabilité*

On considère une expérience aléatoire d'un univers Ω contenant n issues équiprobables. Dans cette situation :

- La probabilité de tout évènement élémentaire est égale à $\frac{\dots}{\dots} = \frac{1}{\text{card}(\dots\dots)}$.
- Pour tout évènement A de Ω, la probabilité de l'évènement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à A}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{\text{card}(\dots\dots)}{\text{card}(\dots\dots)}$$

Exemple 13 — On lance un dé à 6 faces et on note le résultat obtenu sur la face supérieure.
Rappelons que l'univers de cette expérience est $\Omega = \{ \quad ; \quad ; \quad ; \quad ; \quad ; \quad \}$.

La probabilité de chaque évènement élémentaire est $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$.

La probabilité de l'évènement « obtenir un nombre pair » est $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

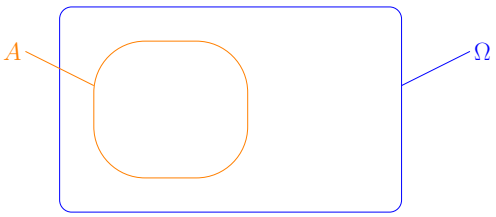
4 Probabilités et opérations sur les évènements

4.1 Probabilité d'un évènement contraire

Proposition 2 | ♥ *Probabilité de $\overline{A}$* ♥

Si A est un évènement d'un univers Ω, alors

Preuve



.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exemple 14 — Soit A un évènement d'un univers Ω tel que $P(\overline{A}) = 0,78$. Que vaut $P(A)$?

.....

.....

4.2 Formule des probabilités totales

Proposition 3 | ♥♥♥ *Formule des probabilités totales* ♥♥♥

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω, alors :

Remarque — Il faudra savoir « jongler entre les évènements » :

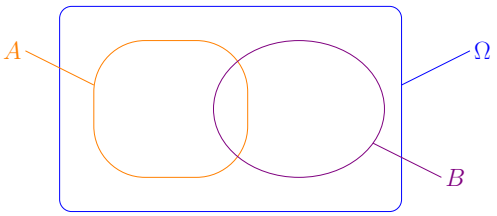
.....

.....

.....

.....

Preuve



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exemple 15 — Soient A et B deux évènements tels que $P(A \cap B) = 0,3$ et $P(A \cap \overline{B}) = 0,12$. Que vaut $P(A)$?

.....

.....

.....

.....

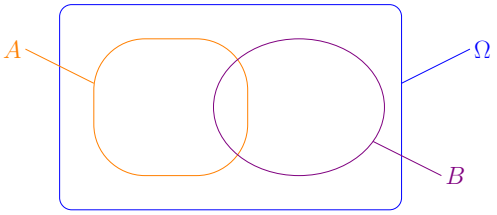
4.3 Probabilité d'une réunion et d'une intersection

Proposition 4 | ❤ *Probabilité de $A \cup B$* ❤

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω, alors :

Remarque — Cette formule peut être utile pour déterminer la probabilité de la réunion $A \cup B$ (qui peut, dans certains cas, être compliquée à calculer) à l'aide de la probabilité de l'intersection $A \cap B$ (qui est en général plus facile à calculer).

Preuve



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exemple 16 — ***Lancer d'un dé équilibré.***
Une expérience consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces.
Soit A l'évènement : « on obtient un nombre impair ».
Soit B l'évènement : « on obtient un multiple de 3 ».
Calculer $P(A)$, $P(\overline{A})$ et $P(A \cup B)$.

https://www.youtube.com/watch?v=y4P_BP-ldxk&list=PLVUDmbpupCaoTbm5IPhDmnM7qnETXp47B&index=5

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Attention

En général : $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ [a]

a. Sauf si A et B sont deux évènements « indépendants », voir Chapitre 6 !

Par exemple, au lancer d'un dé à six faces équilibré, si

A : ..... et B : .....

.....

.....

.....

.....

.....

CHAPITRE 5

Conditionnement

1 Probabilité conditionnelle

1.1 Un exemple

Exercice 1 ***Un exercice d'introduction.*** Dans une entreprise de 160 personnes, on compte 67 femmes. Parmi les personnes de cette entreprise, il y a 32 cadres dont 15 femmes.

1 — Compléter le tableau à double entrée ci-dessous :

	Femmes	Hommes	Total
Cadres	15		32
Autres employés			
Total	67		160

2 — On choisit au hasard, et de manière équiprobable, une personne parmi les 160 personnes de cette entreprise. L'univers Ω est constitué de l'ensemble des employés de l'entreprise.

On considère les évènements suivants :
F : « La personne choisie est une femme » et C : « la personne choisie est un cadre ».

(a) Définir par une phrase chacun des évènements suivants : $\overline{C}$; $F \cap C$ et $F \cap \overline{C}$.

.....

.....

.....

.....

(b) Calculer les probabilités : $P(F), P(C), P(\overline{C}), P(F \cap C), P(F \cap \overline{C})$ et enfin $P(F \cup \overline{C})$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3 — **(a)** La personne choisie est un cadre de l'entreprise. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ? On notera $P_C(F)$ cette probabilité, nommée probabilité conditionnelle de l'événement F sachant que l'événement C est réalisé, ou plus simplement, probabilité conditionnelle de F sachant C.

.....

.....

.....

(b) Trouver une relation entre $P_C(F), P(C)$ et $P(F \cap C)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.2 Définition

Définition 1 | *Probabilité conditionnelle*

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω tel que $P(A) \neq 0$.

.....

.....

.....

.....

Remarque — .....

.....

Remarque — Cette formule peut permettre de calculer la probabilité d'une intersection à l'aide d'une probabilité conditionnelle, *via* la formule dite des probabilités composées.

Proposition 1 | ♥ *Formule des probabilités composées* ♥

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω tel que $P(A) \neq 0$. Alors :

Exemple 1 — Un joueur de tennis rate son premier service avec une probabilité de $0,2$. Sachant qu'il rate son premier service, il rate alors son deuxième service avec probabilité $0,3$.
Quelle est la probabilité que le joueur rate ses deux services ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.3 Propriétés d'une probabilité conditionnelle

Proposition 2 | *Deux propriétés*

Soient A et B deux évènements avec $P(A) \neq 0$. Alors :

- .....
- .....

Preuve

Démontrons le second point.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

■ **Exercice 2** A la montagne, 80% des vacanciers font du ski alpin et les 20% restants font de la randonnée en raquettes.
48% des skieurs et 55% des marcheurs sont des femmes. On choisit un vacancier au hasard, et on note :
S l'événement : « Le vacancier choisi fait du ski alpin ». F l'événement : « Le vacancier choisi est une femme ».

1 — Traduire les données chiffrées de l'énoncé par des probabilités.

.....

.....

.....

2 — Déterminer la probabilité de choisir un vacancier faisant du ski et étant une femme.

.....

.....

.....

.....

3 — Déterminer la probabilité de choisir un vacancier faisant des raquettes et étant une femme.

.....

.....

.....

.....

4 — Quelle est la probabilité de choisir un vacancier étant une femme ?

.....

.....

.....

.....

5 — Trouver la probabilité que le vacancier choisi soit un homme sachant qu'il fait de la randonnée en raquettes.

.....

.....

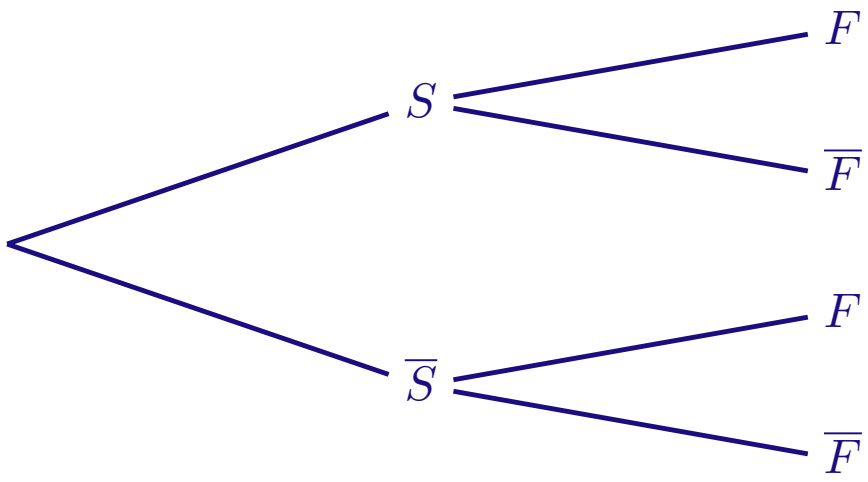
.....

.....

2 Utilisation d'un arbre pondéré

2.1 Un exemple

Exercice 3 Traduisons l'exemple précédent à l'aide d'un arbre de probabilités (appelé aussi arbre pondéré) :



1 — Selon vous, comment peut-on retrouver $P(S \cap F)$ à l'aide de l'arbre ?

.....

.....

.....

.....

2 — De la même manière, calculer à l'aide de l'arbre $P(\overline{S} \cap \overline{F})$.

.....

.....

.....

.....

3 — Selon vous, comment peut-on retrouver $P(F)$ à l'aide de l'arbre ?

.....

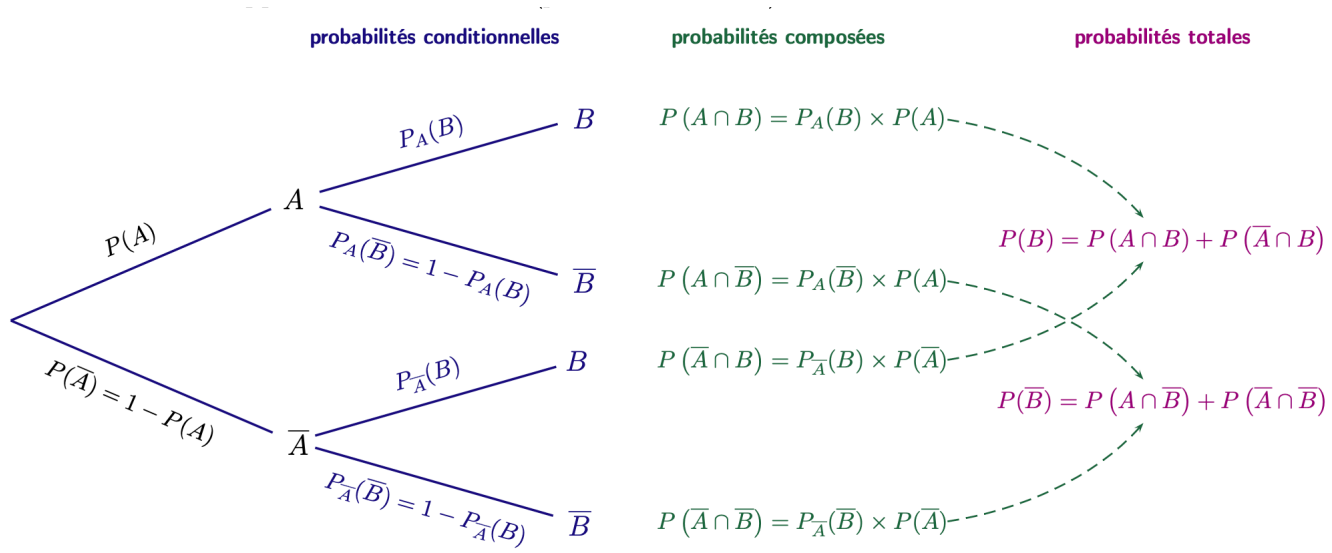
.....

.....

.....

.....

2.2 Calculs dans un arbre pondéré



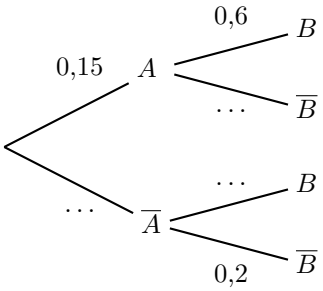
Règles de calculs : Dans un arbre pondéré,

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud vaut toujours .....
- La probabilité associée à un chemin est égale au ..... des probabilités figurant sur les branches de chemin.

  Par exemple, $P(A \cap B) =$ .....
- La probabilité d'un événement est égale à ..... des probabilités associées à chacun des chemins réalisant cet événement.

Exercice 4 On considère l'arbre pondéré ci-dessous.

1 — Compléter l'arbre (au niveau des pointillés).



2 — **(a)** Donner la probabilité de B sachant A.

.....

(b) Donner la probabilité de $\overline{B}$ sachant que $\overline{A}$ est réalisé.

.....

3 — **(a)** Calculer la probabilité de l'évènement $A \cap B$.

.....

.....

.....

(b) Calculer la probabilité de l'évènement $\overline{A} \cap \overline{B}$.

.....

.....

.....

4 — **(a)** Calculer $P(B)$.

.....

.....

.....

.....

(b) En déduire $P_B(A)$.

.....

.....

.....

■ **Exercice 5** ***(A faire sur votre cahier d'exercices).*** Dans une population, 80% des personnes sont vaccinées contre une maladie. Parmi les personnes vaccinées, 10% tombent malades, et parmi les personnes non vaccinées, 40% tombent malades. On note V l'événement être vacciné, et M l'événement être malade. On s'intéresse à l'état de santé d'une personne choisie au hasard dans la population.

1 — Faire un arbre de probabilité de la situation.

2 — Déterminer $P_V(M)$.

3 — Déterminer la probabilité d'être vacciné et d'être malade.

4 — En déduire $P(M)$.

5 — Déterminer la probabilité d'être vacciné sachant qu'on est malade, puis la probabilité de ne pas être vacciné bien qu'on soit malade.

3 Formule des probabilités totales : généralisation

Proposition 3 | *Formule des probabilités totales, cas général*

Considérons une expérience aléatoire d'univers Ω.
Soit n en entier naturel. Soient A_1, A_2, ..., A_n des évènements tels que :

.....

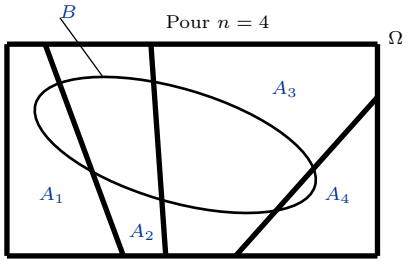
.....

Alors, ...

.....

.....

.....



Remarque — En pratique, on se limitera au cas où $n = 2$ (formule déjà connue) ou $n = 3$.

On dit que .....

.....

Exercice 6 ***(A faire sur votre cahier). Exercice du baccalauréat S, 2013. Classique, à savoir refaire !***

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1 — Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
On envisage les évènements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
- C : « l'arbre choisi est un conifère »,
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

(a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.
(b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.
(c) Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à $0,525$.
(d) L'arbre choisi est un conifère.
Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

CHAPITRE 6

Indépendance

1 Indépendance

Moralement, ...

.....

.....

.....

Définition 1 | *Indépendance*

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω.

On dit que A et B sont **indépendants** lorsque

Proposition 1 | *Indépendance et probabilités conditionnelles*

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω de probabilités non-nulles.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) ..... **(b)** .....

(c) ..... **(d)** .....

Preuve

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

■ **Exercice 1** On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.
Soit R l'évènement : « On tire un roi ».
Soit T l'évènement : « On tire un trèfle ».
Les évènements R et T sont-ils indépendants ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Attention

Ne pas confondre indépendance et incompatibilité !
Ce n'est pas du tout la même chose.

Par exemple, au lancer d'un dé à six faces équilibré, si

A : ..... et B : .....

.....

.....

.....

.....

.....

Proposition 2 | *Indépendance d'évènements contraires*

Soient A et B deux évènements d'un univers Ω.

.....

.....

.....

Preuve

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 Succession de deux épreuves indépendantes

Définition 2

En réalisant successivement deux expériences aléatoires telles que les événements associés à la première soient indépendants des événements associés à la seconde, on dit que l'on réalise une **succession de deux épreuves indépendantes**.

Exemple 1 — ***Exemples de successions d'épreuves indépendantes***

- .....

  .....

  .....

- .....

  .....

  .....

Proposition 3 | *Successions d'épreuves indépendantes, calculs de probabilités.*

Lors d'une succession de deux épreuves indépendantes, la probabilité d'un couple de résultats est égale au produit des probabilités de chacun d'entre eux.

Exemple 2 — On lance deux fois d'affilé un dé équilibré à 6 faces.
Quelle est la probabilité d'obtenir un 2, puis un 5 ?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

CHAPITRE 7

Variables aléatoires

1 Variables aléatoires. Loi de probabilité.

1.1 Variable aléatoire

Définition 1 | *Variable aléatoire*

Considérons une expérience aléatoire d'univers Ω (l'ensemble de toutes les issues de l'expérience).

Une **variable aléatoire** (souvent notée X) sur Ω est .....

.....

.....

Exemple 1 — Considérons l'expérience aléatoire suivante :

« On lance un dé équilibré à 6 faces et on regarde le résultat ».

L'**univers** Ω de cette expérience, c'est-à-dire l'ensemble des issues (les résultats possibles du lancer de dé) est

$$\Omega = \{ \quad ; \quad ; \quad ; \quad ; \quad ; \quad \}$$

On considère le jeu suivant associé à cette expérience :

- Si le résultat est pair, on gagne 2 €,
- Si le résultat est 1, on gagne 3 €,
- Pour les issues 3 et 5, on perd 4 €.

Soit X la variable aléatoire donnant le gain, positif ou négatif, après un lancer. On a :

$$X(1) = \quad ; \; X(2) = \quad ; \; X(3) = \quad ; \; X(4) = \quad ; \; X(5) = \quad \text{et} \quad X(6) =$$

Dans cet exemple, les **valeurs prises** par la variable aléatoire X est l'ensemble $X(\Omega) = \{ \quad ; \quad ; \quad \}$

Quelques remarques et notations :

♣ La variable X est qualifiée d'*aléatoire* car les valeurs de X dépendent du résultat d'une expérience *aléatoire*.

♣ En Première, les variables aléatoires que vous rencontrerez prendront **un nombre fini** de valeurs.
Si X est une variable aléatoire sur Ω prenant n valeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ (où n est un entier naturel non-nul), l'ensemble des **valeurs prises** par X est noté

$$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

1.2 Évènements du type $\{X = x_i\}$ ou $\{X \leqslant x_i\}$ ou $\{X > x_i\}$, etc.

Définition 2 | *Evènement* $\{X = x_i\}$

Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω. On suppose que X peut prendre les valeurs $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

L'évènement $\{X = x_i\}$ signifie : « ..... ».

La probabilité de l'évènement $\{X = x_i\}$, notée $P(X = x_i)$ ou parfois p_i, est .....

.....

Exemple 2 — Reprenons l'exemple précédent. Dans ce contexte, l'évènement $\{X = 2\}$ signifie :

« ..... »

De plus, on a $P(X = 2) =$

Définition 3 | *Evènement* $\{X \leqslant x_i\}$

Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω.
On suppose que X peut prendre les valeurs $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

L'évènement $\{X \leqslant x_i\}$ signifie :

« ..... »

La probabilité de l'évènement $\{X \leqslant x_i\}$, notée $P(X \leqslant x_i)$, est .....

.....

On peut de même définir les évènements du type $\{X < x_i\}$, $\{X \geqslant x_i\}$ ou bien $\{X > x_i\}$ ainsi que leurs probabilités associées.

1.3 Loi de probabilité

Définition 4 | *Loi de probabilité*

Soit X une variable aléatoire sur un univers Ω.
On suppose que X peut prendre les valeurs $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

La **loi de probabilité** de X est .....

.....

Une loi de probabilité est souvent donnée sous la forme du tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
$P(X = x_i)$					

Exemple 3 — Reprenons l'expérience du premier exemple. Considérons l'expérience aléatoire suivante :

« On lance un dé équilibré à 6 faces et on regarde le résultat ».

On considère le jeu suivant associé à cette expérience :

- Si le résultat du dé est pair, on gagne 2 €,
- Si le résultat est 1, on gagne 3 €,
- Pour les issues 3 et 5, on perd 4 €.

On note X la variable aléatoire donnant le gain après un lancer. Rappelons les valeurs prises par X :

$X(1) =$; $X(2) =$; $X(3) =$; $X(4) =$; $X(5) =$ et $X(6) =$

On a ainsi :

- $P(X = 2) =$
- $P(X = 3) =$
- $P(X = -4) =$

x_i			
$P(X = x_i)$			

Remarque — « La somme des probabilités vaut 1 »

Si X est une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, ..., x_n avec probabilités respectives p_1, p_2, ..., p_n :

.....

ce que l'on note aussi : .....

En français : .....

.....

Méthode

Comment trouver la loi de probabilité d'une variable aléatoire X ?

① .....

.....

② .....

.....

③ .....

.....

④ .....

.....

Exercice 1 Dans une urne, on place 7 boules indiscernables au toucher portant les numéros :

① ; ② ; ③ ; ④ ; ⑤ ; ⑥ ; ⑦.

On pioche au hasard une boule. Si le numéro obtenu est pair, on perd un point. Si le numéro est impair, on gagne le nombre de points égal au numéro tiré. On définit la variable aléatoire X comme donnant le nombre algébrique de points obtenus (ce nombre peut donc être négatif).

1 — Quel est l'univers associé à cette expérience aléatoire ?

.....

2 — Quelle sont les valeurs prises par X ?

.....

.....

.....

.....

3 — Déterminer la loi de probabilité de X.

4 — Calculer $P(X \geqslant 3)$ et interpréter le résultat.

.....

.....

.....

.....

5 — Calculer $P_{\{X>0\}}(X \geqslant 5)$ et interpréter le résultat.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 Espérance, variance et écart type

2.1 Espérance mathématique

Définition 5 | *Espérance*

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \ldots, x_n$ avec probabilité $p_1, \ldots, p_n$.

x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n

L'**espérance mathématique** de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $E(X)$, défini par

$$E(X) =$$

Interprétation. Puisque $p_1 + \ldots + p_n = 1$, on peut réecrire $E(X)$ comme étant

$$E(X) = \frac{p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + \ldots + p_n}.$$

Ainsi, l'espérance $E(X)$ s'interprète comme étant la **moyenne pondérée** des **valeurs prises par X**.

Exemple 4 — Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-contre. On a :

$$E(X) =$$
$$=$$

x_i	-5	1	10
$P(X = x_i)$	0,3	0,5	0,2

Remarque — L'espérance d'une variable aléatoire X s'interprète comme étant la **valeur moyenne** des valeurs prises par X lorsque l'expérience se répète **un très grand nombre de fois**.

Ainsi, dans les cas où l'expérience aléatoire est un jeu avec X modélisant un gain :

- Le jeu est dit **équitable** si .....
- Le jeu est dit **favorable** pour le joueur si .....
- Le jeu est dit **défavorable** pour le joueur si .....

Exercice 2 Considérons l'expérience aléatoire suivante :

« On lance un dé équilibré à 6 faces et on regarde le résultat »

On considère le jeu suivant associé à cette expérience :

- Si le résultat est 1 ou 2, on perd 2 €,
- Si le résultat est 3, on gagne $0,5$ €,
- Si le résultat est 4, 5 ou 6, on gagne 1 €.

On note X la variable aléatoire donnant le gain, positif ou négatif, après un lancer.

1 — Donnez la loi de probabilité de X.

.....

.....

2 — Calculer l'espérance mathématique de X et interprétez le résultat.

.....

.....

.....

.....

.....

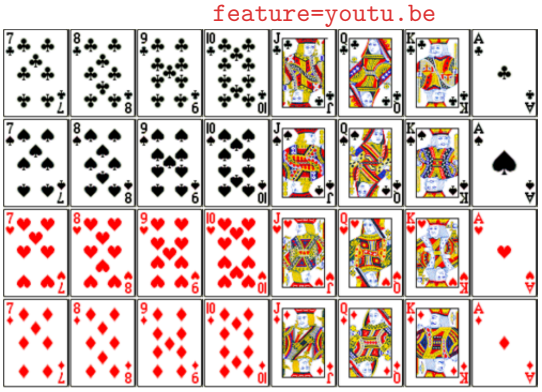
.....

Exercice 3

Considérons l'expérience aléatoire suivante :

« On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes ».

https://www.youtube.com/watch?v=AcWVxHgtWp4&feature=youtu.be



On considère le jeu suivant :

- Si on tire un coeur, on gagne 2 €
- Si on tire un roi, on gagne 5 €
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

Si l'on tire le roi de coeur, on gagne 5 € + 2 € = 7 €.

On note X la variable aléatoire qui, à une carte tirée, associe un gain ou une perte.

1 — Déterminer la loi de probabilité de X.

2 — Calculer $P(X \geqslant 5)$ et interpréter le résultat.

3 — Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat. Le jeu est-il plutôt favorable à l'organisateur ou au joueur de la partie ?

2.2 Indicateurs de dispersion : variance et écart type

Définition 6 | *Variance et écart type*

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \ldots, x_n$ avec probabilité $p_1, \ldots, p_n$.

x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n

Notons $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

- ♣ La **variance** de X est le réel $V(X)$ défini par

$$V(X) =$$

- ♣ L' **écart type** de X, noté $\sigma(X)$ est défini par $\sigma(X) =$

Interprétation. Puisque $p_1 + \ldots + p_n = 1$, on peut réecrire $V(X)$ comme étant

$$V(X) = \frac{p_1(x_1 - E(X))^2 + \ldots + p_n(x_n - E(X))^2}{p_1 + \ldots + p_n}.$$

La variance $V(X)$ est ainsi .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

■ **Exemple 5** — Reprenons l'énoncé de l'**Exercice 3** (jeu de cartes).
Calculer la variance et l'écart type de la variable aléatoire X.

.....

.....

.....

.....

.....

.....