Devoir sur table # 1
23/09/2023 – Durée : 2h30

Consignes. *Les cinq exercices sont indépendants.*

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

*Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les encadrant, en les surlignant ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction. L'usage de la calculatrice est strictement **interdit**.*

Exercice 1 | Un peu de logique et de quantificateurs. Solution

*Les questions **1.**, **2.**, **3.** et **4.** de cet exercice sont indépendantes.*

1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Ecrire (à l'aide de quantificateurs) la négation de la proposition :

$$\forall M > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq M.$$

2. Soient x et y deux nombres réels. L'équivalence : $(xy \geq 0) \iff (x \geq 0)$ **et** $(y \geq 0)$ est-elle vraie ?

3. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et x un nombre réel. Donner la négation de la proposition : $(x > 1)$ **ou** $(f(x) = 2)$.

4. **(a)** Montrer que pour tous nombres réels a et b,

$$\max(a,b) + \min(a,b) = a + b.$$

(b) Existe-t-il des réels a et b tels que : $\max(a,b) + \min(a,b) = a + b + 2023$?

Exercice 2 | Un peu de calculs. Solution

1. Écrire sous la forme $2^p \times 3^q$ avec p et q deux entiers relatifs :

$$A = \frac{\left(\frac{8}{27}\right)^4 \times 2^7 \times (-3)^8}{(9 \times 2^{-3})^{-4}}, \qquad B = \frac{7 \times 3^{18} + 3^{20}}{5 \times 3^{23} - 3^{24}}.$$

2. **2.1)** Ecrire le nombre $C = \sqrt{27} - 2\sqrt{12} + \sqrt{147}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où a est un entier naturel et b un entier naturel *le plus petit possible.*

2.2) Ecrire sans racine carrée au dénominateur le nombre : $D = \dfrac{2}{5 - \sqrt{3}}$.

2.3) Calculer : $E = \left(\sqrt{6 + \sqrt{11}} + \sqrt{6 - \sqrt{11}}\right)^2$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Ecrire sans valeur absolue l'expression $|2x+1| + |3-x|$ *(on pourra présenter les résultats sous la forme d'un tableau de signes)*

Exercice 3 | Deux récurrences. Solution

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4^n. \end{cases}$

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{8}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{11}4^n.$$

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4, u_1 = 11, \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n. \end{cases}$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = (-1)^n + 3 \times 4^n.$$

Exercice 4 | Etude d'une proposition. Solution

On considère la proposition

$$\mathscr{P} : \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star,\ \left(x^2 + \frac{1}{y^2} > 1 \implies \left(|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ou } \left(|y| < \sqrt{2}\right)\right).$$

1. Écrire la négation de $\mathscr{P}$.

2. **2.1)** Écrire la contraposée de l'implication figurant dans $\mathscr{P}$.

2.2) Montrer, en utilisant un raisonnement par contraposée, que la proposition $\mathscr{P}$ est vraie.

3. La proposition $\mathscr{P}$ reste-t-elle vraie en remplaçant l'implication (figurant dans $\mathscr{P}$) par sa réciproque ?

Exercice 5 | Réels satisfaisant une propriété. Solution

On s'intéresse dans cet exercice aux nombres réels x non-nuls vérifiant la propriété

$$\mathscr{H} : \quad \forall n \in \mathbb{N},\quad x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.$$

1. Trouver deux entiers relatifs x vérifiant la propriété $\mathscr{H}$.

2. Dans cette question, x est un réel non nul tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

2.1) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n} + x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}$$

2.2) En déduire par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

3. Dans cette question, on pose $x_0 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

3.1) Vérifier que : $x_0 + \dfrac{1}{x_0} = 3$.

3.2) Existe-t-il des réels non entiers vérifiant la propriété $\mathscr{H}$?

Correction du devoir surveillé 1
23/09/2023 – Durée : 2h30

Solution (exercice 1) Énoncé

1. La négation de cette proposition est : $\boxed{\exists M > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < M}$

2. L'équivalence est fausse puisque l'implication

$$(xy \geqslant 0) \implies (x \geqslant 0) \ \underline{\textbf{et}}\ (y \geqslant 0)$$

est fausse : par exemple, lorsque $x = -2$ et $y = -3$, on a $xy = 6$ (donc $xy \geqslant 0$) et pourtant, x et y ne sont pas positifs.

3. La négation de la proposition est : $\boxed{(x \leqslant 1)\ \underline{\textbf{et}}\ (f(x) \neq 2).}$

4. **(a)** On raisonne par disjonction de cas.

- **[1er cas.]** Si $a \leqslant b$, on a : $\begin{cases} \max(a,b) &= b \\ \min(a,b) &= a \end{cases}$ donc :

$$\underbrace{\max(a,b)}_{=b} + \underbrace{\min(a,b)}_{=a} = b + a = a + b.$$

- **[2nd cas.]** Si $a > b$, on a : $\begin{cases} \max(a,b) &= a \\ \min(a,b) &= b \end{cases}$ donc :

$$\underbrace{\max(a,b)}_{=a} + \underbrace{\min(a,b)}_{=b} = a + b.$$

Dans tous les cas, on a : $\boxed{\max(a,b) + \min(a,b) = a + b}$

(b) Supposons par l'absurde l'existence de deux réels a et b tels que :

$$\max(a,b) + \min(a,b) = a + b + 3.$$

D'après la question précédente, on a : $\max(a,b) + \min(a,b) = a + b$.
Ainsi, on a :

$$a + b = a + b + 3,$$

d'où : $0 = 3$, ce qui est absurde. Ainsi :

$\boxed{\text{Il n'existe pas de réels } a \text{ et } b \text{ tels que : } \max(a,b) + \min(a,b) = a + b + 3.}$

Solution (exercice 2) Énoncé

1. On a :

$$A = \frac{\left(\frac{8}{27}\right)^4 \times 2^7 \times (-3)^8}{(9 \times 2^{-3})^{-4}} = \frac{\left(\frac{2^3}{3^3}\right)^4 \times 2^7 \times 3^8}{(3^2 \times 2^{-3})^{-4}} = \frac{2^{12} \cdot 3^{-12} \cdot 2^7 \cdot 3^8}{3^{-8} 2^{12}} = \frac{2^{19}}{2^{12}} \cdot \frac{3^{-4}}{3^{-8}} = \boxed{2^7 3^4}$$

$$B = \frac{7 \times 3^{18} + 3^{20}}{5 \times 3^{23} - 3^{24}} = \frac{3^{18}\left(7 + 3^2\right)}{3^{23}(5-3)} = 3^{-5} \cdot \frac{16}{2} = 3^{-5} \cdot 8 = \boxed{3^{-5} 2^3}$$

2. **2.1)** On a :

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{27} - 2\sqrt{12} + \sqrt{147} \\ &= \sqrt{9 \times 3} - 2\sqrt{4 \times 3} + \sqrt{49 \times 3} \\ &= 3\sqrt{3} - 2 \times 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 7\sqrt{3} \\ &= \boxed{6\sqrt{3}} \end{aligned}$$

2.2) $$D = \frac{2}{5 - \sqrt{3}} = \frac{2\left(5 + \sqrt{3}\right)}{\left(5 - \sqrt{3}\right)\left(5 + \sqrt{3}\right)} = \frac{2\left(5 + \sqrt{3}\right)}{25 - 3} = \boxed{\frac{5 + \sqrt{3}}{11}}$$

2.3) On a :

$$\begin{aligned} E &= \left(\sqrt{6 + \sqrt{11}} + \sqrt{6 - \sqrt{11}}\right)^2 \\ &= 6 + \cancel{\sqrt{11}} + 2\sqrt{6 + \sqrt{11}}\sqrt{6 - \sqrt{11}} + 6 - \cancel{\sqrt{11}} && \text{(} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{)} \\ &= 12 + 2\sqrt{\left(6 + \sqrt{11}\right)\left(6 - \sqrt{11}\right)} && \text{(Relation } \sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy} \text{)} \\ &= 12 + 2\sqrt{36 - 11} && \text{(} (a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \text{)} \\ &= 12 + 2\sqrt{25} \\ &= 12 + 2 \times 5 \\ &= \boxed{22} \end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons $A(x) = |2x + 1| + |3 - x|$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$\lvert 2x+1 \rvert$	$-2x-1$		0	$2x+1$		$2x+1$	
$\lvert 3-x \rvert$	$3-x$			$3-x$	0	$x-3$	
$A(x)$	$2-3x$			$4+x$		$3x-2$	

Solution (exercice 3) Énoncé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n) : u_n = \frac{8}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{11}4^n$.

Initialisation. On a :

$$\frac{8}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \frac{3}{11}4^0 = \frac{8}{11} + \frac{3}{11} = \frac{11}{11} = 1 = u_0,$$

donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par définition de la suite,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{1}{3}u_n + 4^n \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{8}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{11}4^n\right) + 4^n \qquad \text{Par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{8}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{11}4^n + 4^n \\
&= \frac{8}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{11}+1\right)4^n \\
&= \frac{8}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{12}{11}\cdot 4^n \\
&= \frac{8}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{3}{11}\times 4\cdot 4^n \\
&= \frac{8}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{3}{11}4^{n+1}.
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
D'où le résultat par le principe de récurrence.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{H}(n) : u_n = (-1)^n + 3\times 4^n$.

- **Initialisation.** pour $n=0$ et pour $n=1$:
  - ◇ D'un côté, par définition de la suite, on sait que $u_0 = 4$. De l'autre côté, on a : $(-1)^0 + 3\times 4^0 = 1+3 = 4$. Donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie.
  - ◇ D'un côté, par définition de la suite, on sait que $u_1 = 11$. De l'autre côté, on a : $(-1)^1 + 3\times 4^1 = -1+12 = 11$. Donc $\mathscr{H}(1)$ est vraie.

  Hérédité. Supposons $\mathscr{H}(n)$ et $\mathscr{H}(n+1)$ vraies pour n fixé dans $\mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{H}(n+2)$ est vraie.
  Par définition de la suite, on sait que : $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$.
  Par hypothèse de récurrence, on sait que

$$\begin{cases} u_n = (-1)^n + 3\times 4^n, \\ u_{n+1} = (-1)^{n+1} + 3\times 4^{n+1}. \end{cases}$$

Ainsi on obtient que :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 3u_{n+1} + 4u_n \\
&= 3((-1)^{n+1} + 3\times 4^{n+1}) + 4((-1)^n + 3\times 4^n) \\
&= 3(-1)^{n+1} + 9\times 4^{n+1} + 4\times(-1)^n + 3\times 4^{n+1} \\
&= (-1)^n(-3+4) + 12\times 4^{n+1} \\
&= (-1)^n + 3\times 4\times 4^{n+1} \\
&= (-1)^n + 3\times 4^{n+2}.
\end{aligned}$$

Or, $(-1)^{n+2} = (-1)^n(-1)^2 = (-1)^n$. Ainsi, on a :

$$u_n = (-1)^{n+2} + 3\times 4^{n+2}.$$

Ainsi $\mathscr{H}(n+2)$ est vraie.

Conclusion : il résulte du principe de récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = (-1)^n + 3\times 4^n$.

Solution (exercice 4) Énoncé

1. La négation de $\mathscr{P}$ est

$$\overline{\mathscr{P}} : \quad \exists (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^\star, \quad \left(\left(x^2 + \frac{1}{y^2} > 1\right) \text{ et } \left(|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ et } \left(|y| \geq \sqrt{2}\right)\right)$$

2. 2.1) La contraposée de l'implication figurant dans $\mathscr{P}$ est

$$\left(|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ et } \left(|y| \geq \sqrt{2}\right) \Longrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{y^2} \leq 1\right)$$

2.2) On raisonne par contraposée. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^\star$ de sorte que :

$$\left(|x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ et } \left(|y| \geq \sqrt{2}\right).$$

Alors on a, en composant par la fonction carrée qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\left(x^2 \leq \frac{1}{2}\right) \text{ et } \left(y^2 \geq 2\right).$$

On a aussi utilisé le fait que $|x|^2 = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On compose par la fonction inverse (décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$) dans la deuxième inégalité, et on obtient :

$$\left(x^2 \leq \frac{1}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{1}{y^2} \leq \frac{1}{2}\right).$$

En additionnant ces deux inégalités, on a bien montré que :

$$x^2 + \frac{1}{y^2} \leq 1.$$

Par contraposée, on a bien montré que :

$$\boxed{x^2+\frac{1}{y^2}>1 \implies \left(|x|>\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ou } \left(|y|<\sqrt{2}\right)}$$

3. Notons $\mathscr{Q}$ la proposition

$$\mathscr{Q}: \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\star,\ \left(\left(|x|>\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ou } \left(|y|<\sqrt{2}\right) \implies x^2+\frac{1}{y^2}>1\right).$$

Posons $x_0=0$ et $y_0=1$. Puisque $|y_0|=1$, on a bien $|y_0|<\sqrt{2}$.

Ainsi, la proposition $\left(|x_0|>\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **ou** $\left(|y_0|<\sqrt{2}\right)$ est vraie. Or,

$$x_0^2+\frac{1}{y_0^2}=0+1=1,$$

on n'a donc pas : $x_0^2+\frac{1}{y_0^2}>1$.

Ainsi, la proposition $\mathscr{Q}$ est fausse. La proposition $\mathscr{P}$ ne reste donc pas vraie en remplaçant l'implication par sa réciproque.

Solution (exercice 5) Énoncé

1. Posons $x=1$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors,

$$x^n+\frac{1}{x^n}=1^n+\frac{1}{1^n}=1+\frac{1}{1}=2,$$

avec $2\in\mathbb{Z}$, donc $x^n+\frac{1}{x^n}\in\mathbb{Z}$. Ainsi, 1 vérifie la propriété $\mathscr{H}$.

Posons $x=-1$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors,

$$x^n+\frac{1}{x^n}=(-1)^n+\frac{1}{(-1)^n}.$$

On en déduit que :

- si n est pair, alors $x^n+\frac{1}{x^n}=(-1)^n+\frac{1}{(-1)^n}=1+\frac{1}{1}=2$, avec $2\in\mathbb{Z}$.
- si n est impair, alors $x^n+\frac{1}{x^n}=(-1)^n+\frac{1}{(-1)^n}=-1+\frac{1}{-1}=-2$, avec $-2\in\mathbb{Z}$.

Par disjonction de cas, $x^n+\frac{1}{x^n}\in\mathbb{Z}$. Ainsi, -1 vérifie la propriété $\mathscr{H}$.

$\boxed{1 \text{ et } -1 \text{ sont deux exemples d'entiers vérifiant la propriété } \mathscr{H}}$

2. 2.1) Soit $n\in\mathbb{N}$. En appliquant une double distributivité,

$$\begin{aligned}\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)&=x^{n+2}+\frac{x^{n+1}}{x}+\frac{x}{x^{n+1}}+\frac{1}{x^{n+2}}\\&=x^{n+2}+x^n+\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{n+2}}\\&=x^n+\frac{1}{x^n}+x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}},\end{aligned}$$

d'où le résultat.

2.2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}(n): x^n+\frac{1}{x^n}\in\mathbb{Z}$.

Initialisation. D'une part, $x^0+\frac{1}{x^0}=1+1=2\in\mathbb{Z}$.

D'autre part, $x^1+\frac{1}{x^1}=x+\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}$ d'après l'énoncé.

Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies pour n fixé dans $\mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

En utilisant l'égalité obtenue à la question précédente, et en isolant le terme $x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}}$, on a :

$$x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}}=\underbrace{\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)}_{\in\mathbb{Z}}\times\underbrace{\left(x+\frac{1}{x}\right)}_{\in\mathbb{Z}}-\underbrace{\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)}_{\in\mathbb{Z}}$$

Du fait que les nombres $\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right)$, $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ et $\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)$ sont entiers on déduit que $x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+2}}$ est aussi entier.

Ainsi, $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie. En conclusion, par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$.

3. 3.1) Calculons :

$$\begin{aligned}x_0+\frac{1}{x_0}&=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{3+\sqrt{5}}\\&=\frac{(3+\sqrt{5})^2+2^2}{2(3+\sqrt{5})}\\&=\frac{9+6\sqrt{5}+5+4}{2(3+\sqrt{5})}\\&=\frac{18+6\sqrt{5}}{2(3+\sqrt{5})}\\&=\frac{6\cancel{(3+\sqrt{5})}}{2\cancel{(3+\sqrt{5})}}\\&=3,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

3.2) Puisque $x_0+\frac{1}{x_0}\in\mathbb{Z}$, par la question **2.2)**, le réel x_0 vérifie la propriété $\mathscr{H}$. Or, x_0 n'est pas un entier. Ainsi :

$\boxed{\text{Il existe bien des réels non entiers satisfaisant la propriété } \mathscr{H}}$