

Chapitre # (ALG) 1

Logique, Rudiments ensemblistes & Raisonnements

- 1 Ensembles
- 2 Logique élémentaire
- 3 Quantificateurs
- 4 Différentes techniques de preuve
- 5 Alphabet grec
- 6 Exercices

La logique est l'hygiène des Mathématiques

— André WEIL

Résumé & Plan

Bienvenue en prépa BCPST! Ce premier chapitre vise à clarifier les notions - pour la plupart déjà rencontrées au lycée - de logique et de raisonnement. On en profitera pour introduire des notations utiles pour la suite de l'année.

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P]. Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.



Les Mathématiques sont construits à partir d'axiomes — c'est-à-dire des faits et consensus que nous ne cherchons pas à démontrer — et à partir desquels nous déduisons des propositions/théorèmes *etc.*, si possible vrais. L'objectif de ce chapitre est de formaliser les déductions de nouveaux énoncés (symboles logiques, techniques de preuve, *etc.*).

1. ENSEMBLES

La notion d'ensemble est difficile à définir proprement, on s'appuiera plutôt sur l'intuition que l'on a de cette notion, en le qualifiant vaguement de « collection d'éléments ».

1.1. Appartenance et inclusion

Définition 1 | Ensemble, ensemble vide

- Un *ensemble* E est une collection d'éléments x qui sont dits *appartenir* à l'ensemble E , ce que l'on note $x \in E$. On note les éléments de cette collection entre accolades.
- Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément, on l'appelle l'*ensemble vide* et on le note $\emptyset$.

MODES DE DÉFINITION D'UN ENSEMBLE. On peut décrire un ensemble en *extension*, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments (entre accolades), ou en *compréhension*, c'est-à-dire en donnant une propriété caractérisant de manière unique les éléments de E .

Exemple 1 Si on souhaite définir un ensemble E contenant les entiers 1, 2, 3, 4, 5, on peut écrire :

- [Définition en extension]** $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- [Définition en compréhension]** $E = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5\}$

Notation (Non-appartenance, écriture d'un ensemble)

- Lorsqu'un élément x n'appartient pas à l'ensemble E , on note $x \notin E$.
- Un ensemble est *non-ordonné*, ainsi, par exemple : $\{1, 3\} = \{3, 1\}$.
- On n'écrit pas de répétition dans un ensemble. Par exemple : $\{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$.

Remarque 1 (Singleton, paire)

- Un ensemble contenant un unique élément x est appelé **singleton** et est noté $\{x\}$. Par exemple, l'ensemble $\{0\}$ se lit « le singleton zéro ».
- Un ensemble contenant deux éléments est appelé **paire**.

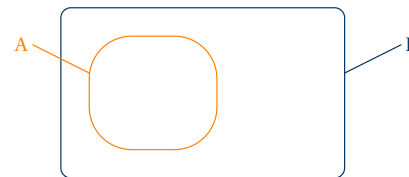
Définition 2 | Inclusion

Soient A et E deux ensembles.

On dit que A est : $\begin{cases} \text{un sous-ensemble de } E \\ \text{inclus dans } E \\ \text{une partie de } E \end{cases}$ si tout élément de A est un élément de E , c'est-à-dire :

Pour tout $x \in A$, $x \in E$.

On note cela $A \subset E$.



Remarque 2 Par exemple, pour tout ensemble E , on a l'inclusion $E \subset E$.

Attention Ne pas confondre appartenance et inclusion!

Appartenance $\neq$ Inclusion! Un élément appartient à un ensemble, et un ensemble est inclus dans un ensemble.

Définition 3 | Égalité d'ensembles

Deux ensembles E et F sont dits égaux si :

$$E \subset F \text{ et } F \subset E.$$

Autrement dit, E et F ont exactement les mêmes éléments. On note cela $E = F$.

Exemple 2 (Une inclusion) On a : $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

On peut écrire aussi l'inclusion **stricte** :

$$\{1, 2, 3\} \subsetneq \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

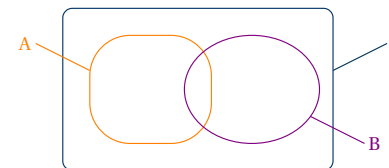
1.2. Opérations sur les ensembles (rappels)

Définition 4 | Intersection

L'**intersection** de deux parties A et B d'un ensemble E est l'ensemble noté $A \cap B$.

L'intersection contient les éléments appartenant à la fois à A et à B .

$A \cap B$ se prononce : « A inter B ».

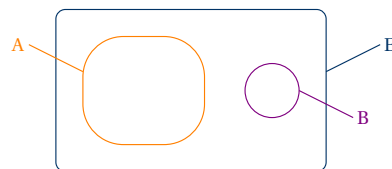


Remarque 3 On a toujours : $\begin{cases} (A \cap B) \subset A, \\ (A \cap B) \subset B. \end{cases}$ En outre, si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$.

Définition 5 | Ensembles disjoints

Deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E sont **disjoints** lorsqu'ils n'ont aucun élément en commun.

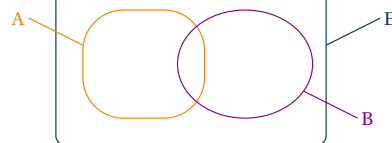
On note alors $A \cap B = \emptyset$

**Définition 6 | Union**

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

La **réunion** de A et B est l'ensemble noté $A \cup B$. Il contient les éléments appartenant à A ou à B (ou aux deux!) ¹.

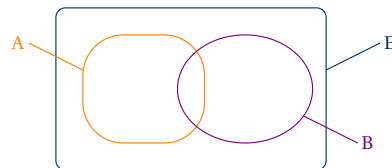
$A \cup B$ se prononce : « A union B ».

**Remarque 4 (A propos de l'union)**

- On a toujours : $\begin{cases} A \subset (A \cup B), \\ B \subset (A \cup B). \end{cases}$ En outre, si $A \subset B$, alors $A \cup B = B$.
- Lorsque A et B sont disjoints, on dit que l'union $A \cup B$ est disjointe et on peut noter la réunion comme étant :

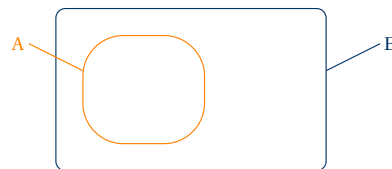
Définition 7 | Ensemble privé d'un autre

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. On note $B \setminus A$ l'ensemble de tous les éléments de B qui ne sont pas dans A.

**Définition 8 | Complémentaire**

Soit E un ensemble et A un ensemble inclus dans E. Le **complémentaire de A dans E** noté $\complement_E A$, contient tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A (autrement dit, c'est l'ensemble $E \setminus A$).

Lorsque l'ensemble E est clair, on peut noter plus simplement $\complement_E A$ comme étant $\bar{A}$.



Exemple 3 Si $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$, alors :

$$\begin{array}{lll} A \cap B = & A \cup B = & \complement_E A = \bar{A} = \\ \complement_E B = \bar{B} = & A \setminus B = & B \setminus A = \end{array}$$

1. En mathématiques, le « ou » est inclusif

Proposition 1 | Règles opératoires

Soit E un ensemble, et A, B, C trois ensembles inclus dans E. Alors :

- [Commutativité]** Les opérations d'intersection et de réunion sont commutatives, c'est-à-dire :

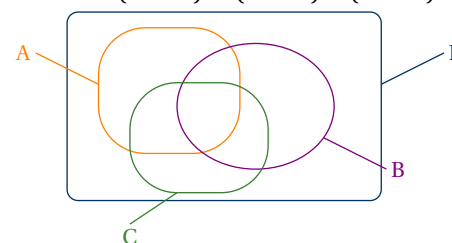
$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad A \cup B = B \cup A.$$

- [Associativité]** Les opérations d'intersection et de réunion sont associatives, c'est-à-dire :

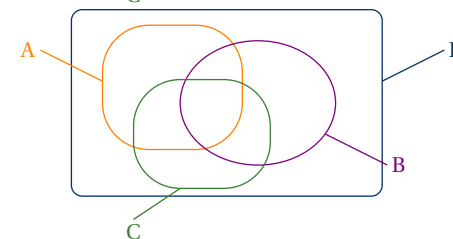
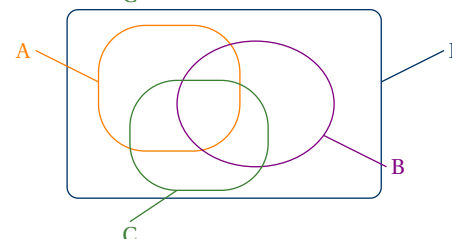
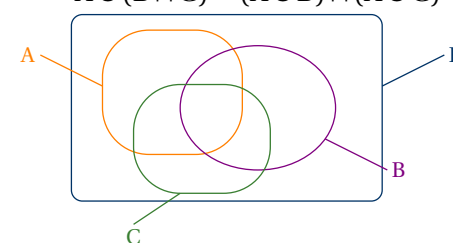
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad \text{et} \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

- [Distributivité]** L'intersection est distributive sur la réunion et la réunion est distributive sur l'intersection. C'est-à-dire, si E est un ensemble et A, B et C sont trois sous-ensembles de E alors

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

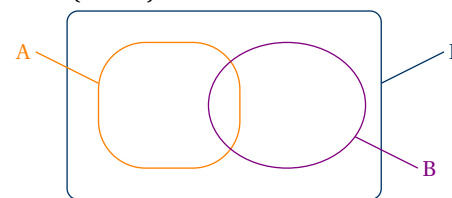


$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

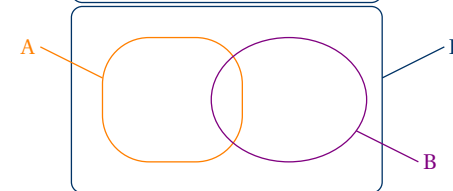
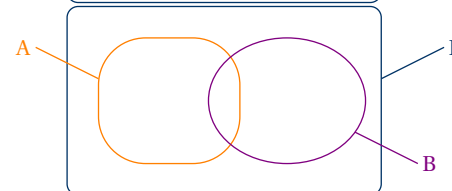
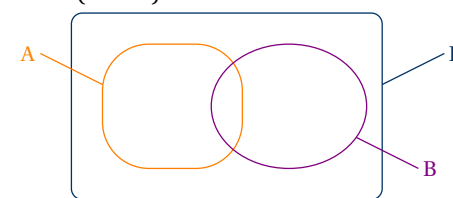


- [Lois de Morgan]** Le passage au complémentaire « transforme » les unions en intersections et vice-versa :

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



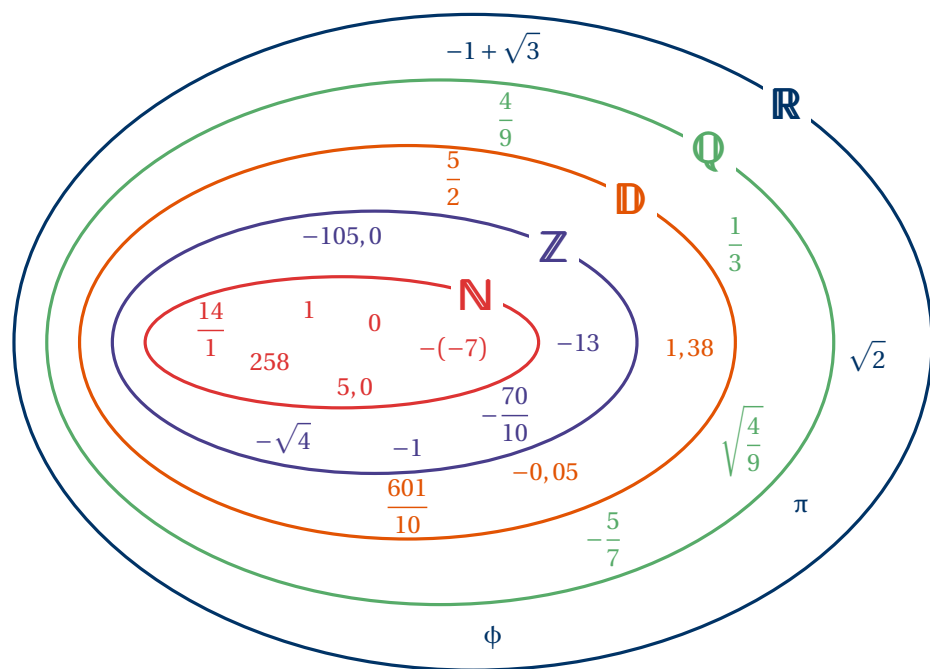
Preuve On démontrera certaines de ces propriétés (plus rigoureusement qu'avec un desin!) en exercice après avoir terminé le chapitre.

Remarque 5 On généralisera plus tard dans l'année ces règles opératoires pour un nombre quelconque d'ensembles (utile pour le calcul de probabilités).

1.3. Ensemble de nombres usuels

On rappelle les notations suivantes :

$$\begin{cases} \mathbb{N} \text{ désigne l'ensemble des entiers naturels : } & \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}; \\ \mathbb{Z} \text{ désigne l'ensemble des entiers relatifs : } & \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}; \\ \mathbb{D} \text{ désigne l'ensemble des nombres décimaux : } & \mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n}; a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}; \\ \mathbb{Q} \text{ désigne l'ensemble des nombres rationnels : } & \mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^* \right\}; \\ \mathbb{R} \text{ désigne l'ensemble des nombres réels.} \end{cases}$$



Comme le dessin le rappelle, on a alors la chaîne d'inclusions suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Par exemple : $-1 \in \mathbb{Z}$ et $-1 \notin \mathbb{N}$, $1,637 = \frac{1637}{10^3} \in \mathbb{D}$ et $1,637 \notin \mathbb{Z}$, $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (on dit que $\sqrt{2}$ est un **nombre irrationnel**).

Σ Notation (Ensembles de nombres positifs/négatifs ou privés de zéro)

On note :

- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ l'ensemble des nombres réels négatifs.
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ l'ensemble des nombres réels non nuls.
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

De manière générale, si E est un des ensembles de nombres, on note

- $E^* = \{x \in E, x \neq 0\}$.
- $E_+ = \{x \in E, x \geq 0\}$, $E_- = \{x \in E, x \leq 0\}$.
- $E_+^* = \{x \in E, x > 0\}$, $E_-^* = \{x \in E, x < 0\}$.

Par exemple $\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble de tous les nombres réels strictement positifs et $\mathbb{Q}_-$ désigne l'ensemble de tous les nombres rationnels négatifs.

NOMBRES PAIRS, NOMBRES IMPAIRS. Soit n un entier naturel. L'entier n est pair si et seulement si il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$, impair si et seulement si il existe un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$.

Par exemple, 10 est pair car $10 = 2 \times 5$ où $5 \in \mathbb{N}$, et 7 est impair puisque $7 = 2 \times 3 + 1$ avec $3 \in \mathbb{N}$.

INTERVALLES D'ENTRIERS. On introduit aussi une nouvelle notation permettant de définir des intervalles d'entiers en « doublant » les crochets.

Σ Notation Intervalle d'entiers

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers avec $a \leq b$. On notera

$$\llbracket a, b \rrbracket = \{n \in \mathbb{Z}, a \leq n \leq b\}$$

Par exemple, $\llbracket 3, 7 \rrbracket =$

× Attention Ne pas confondre avec les intervalles plus classiques

$\llbracket a, b \rrbracket$ est un ensemble fini, à la différence de $[a, b]$ qui est infini. On peut aussi écrire $\llbracket a, b \rrbracket = [a, b] \cap \mathbb{Z}$.

1.4. Produit cartésien

Vous connaissez depuis le collège des produits cartésiens, mais vous n'avez sans doute jamais employé le mot. Par exemple, les vecteurs de la géométrie euclidienne peuvent être repérés par un couple abscisse/ordonnée noté (x, y) avec x, y deux réels. L'ensemble de ces couples forme l'ensemble des points du plan, et est noté $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou encore $\mathbb{R}^2$. Plus généralement, nous avons la définition suivante.

Définition 9 | Produit cartésien de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles.

On note $E \times F$ (ou E^2 si $E = F$) leur produit cartésien, c'est-à-dire l'ensemble de tous les paires *ordonnées* – ou couples – (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}$$

Exemple 4 (Quelques produits cartésiens)

- Si $E = \{1, 2\}$ et $F = \{a, b, c\}$ (où a, b, c désignent trois réels), alors

$$E \times F =$$

- On a :



Attention L'ordre compte!

On tient compte de l'ordre des éléments dans des couples (écrits entre parenthèses, et non pas avec des accolades) Par exemple, $(1, 2) \neq (2, 1)$ (tandis que l'on a $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ pour des ensembles).

Ainsi, écrire une égalité du type

$$(a, b) = (c, d)$$

est équivalent à dire que $a = c$ et $b = d$.

Remarque 6 (Se servir du produit cartésien pour quantifier des variables)

Pour deux ensembles, la notion de produit cartésien possède une intuition géométrique, comme nous l'avons précisé en introduction. La notion de produit cartésien sert souvent aussi à quantifier efficacement des variables. Ainsi, si E, F sont deux ensembles :

$$\text{écrire « soit } x \in E \text{ et soit } y \in F \text{ »} = \text{écrire « soit } (x, y) \in E \times F \text{ »}$$

Si $E = F$, un abus de notation courant est « soit $x, y \in E$ ». (En lieu et place de « soit $(x, y) \in E^2$ »)

La notion de produit cartésien s'étend sans difficulté à n'importe quel nombre fini d'ensembles.

Définition 10 | Produit cartésien de n -ensembles

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{A_i \mid i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ un ensemble de n ensembles. On appelle produit cartésien des A_i l'ensemble

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \left\{ \underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{n\text{-uplets}} \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n \right\}$$

On parle de *couples* pour $n = 2$, de *triplets* pour $n = 3$, de *quadruplets* pour $n = 4$.

Remarque 7 Dans le cas où $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, on note $A \times \cdots \times A = A^n$.

Exemple 5 (Exemples usuels) On a :

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

2. LOGIQUE ÉLÉMENTAIRE

Définition 11 | Proposition

On appelle *proposition* ou *assertion* une affirmation concernant un ou plusieurs objets mathématiques qui est, soit vraie (V), soit fausse (F). La *valeur de vérité* d'une proposition est le vrai ou le faux — mais pas les deux.

Définition 12 | Équivalence de propositions

Deux propositions sont dites équivalentes si elles ont même valeur de vérité.

Exemple 6 (Quelques exemples de propositions)

- La proposition $3 \leq 4$ est vraie, tandis que la proposition $2^2 = 5$ est fausse.
- « Il existe un plus petit entier naturel » est vraie.



>_☞ (Booléens) En Python, il est très facile de faire différents tests logiques pour obtenir la valeur de vérité d'une proposition. Nous le verrons dans le cours d'Informatique, mais voici quelques exemples.

```
>>> 2**2 == 5
False
>>> 3 <= 4
True
>>> 3 < 4
True
```

Définition 13 | Conjecture

Une *conjecture* est une assertion non prouvée mais dont on pense que la valeur de vérité est vraie.

Exemple 7 La conjecture de GOLDBACH dit que tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers (ce n'est pas prouvé). Au lycée, vous aviez l'habitude d'établir des conjectures d'après les figures obtenues à la calculatrice.

Remarque 8 (Axiomatique de la logique) On a interdit depuis le début qu'une proposition soit à la fois vraie et fausse, mais interdit aussi qu'une proposition soit autre chose que vraie ou fausse. Ces deux principes s'appellent le principe de *non-contradiction* et le principe du *tiers exclu*.^a Ces deux principes de base ont fondé la logique mathématique telle que nous l'utilisons habituellement, cependant, ils ne sont pas universellement acceptés : en effet, en 1931 GÖDEL démontra que dans tout système axiomatique de logique (tel que nous les construisons aujourd'hui), il subsiste des énoncés indécidables : dont on ne peut prouver qu'ils sont vrais ou faux.

Il existe cinq opérateurs logiques qui permettent de créer de nouvelles propriétés à l'aide de deux propriétés P et Q.

- **NON** P qui se note : $\bar{P}$
- P **OU** Q
- P **ET** Q
- P $\Rightarrow$ Q qui se lit
- P $\Leftrightarrow$ Q qui se lit

^a. On évitera donc les énoncés contradictoires du type « cette phrase est fausse », qui est subjectif et peut donc être considéré comme vrai et faux en fonction du lecteur.

2.1. La négation

Définition 14 | Négation

Soit P une proposition.

On note **non** (P) ou $\bar{P}$ la négation de la proposition P, *i.e.* la proposition vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

P	$\bar{P}$
V	
F	

Exemple 8 (Quelques négations) Dans le premier exemple, x désigne un nombre réel.

- **non** ($x \geq 0$) =
- Nier la phrase : « tous les professeurs de BCPST 1B sont gentils ».



Proposition 2 | Négation d'une négation

Soit P une proposition. Les propositions P et $\bar{\bar{P}}$ ont même valeur de vérité.

P	$\bar{P}$	$\bar{\bar{P}}$
V		
F		

Preuve C'est clair en écrivant la table de vérité de $\bar{\bar{P}}$:

2.2. Opérateur OU & opérateur ET

Définition 15 | OU - Disjonction

Soient P et Q deux propositions. La proposition « P **ou** Q » est la proposition vraie lorsque au moins l'une des deux propositions P et Q est vraie, *i.e.* lorsque soit P est vraie, soit Q est vraie, soit les deux sont vraies.

P	Q	P ou Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Pour prouver que la proposition « P **ou Q » est vraie, on prouve qu'au moins une des deux propositions est vraie.**

Remarque 9 Le « ou » en mathématiques est un « ou » inclusif : « P ou Q » est vraie si l'une au moins des deux propositions P ou Q est vraie (les deux propositions peuvent être vraies simultanément).

Exemple 9 Indiquer si les propositions sont vraies ou fausses.

- (la fonction $\ln$ est croissante) ou (la fonction $\sin$ est paire) est
- ($3 < 0$) ou (π est un entier) est
- (la fonction $\sin$ est impaire) ou (la fonction $\cos$ est paire) est

Définition 16 | ET - Conjonction

Soient P et Q deux propositions. La proposition « P **et** Q » est la proposition vraie lorsque P et Q sont vraies toutes les deux simultanément.

P	Q	P et Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Pour prouver que la proposition « P **et Q » est vraie, on prouve que les deux propositions sont vraies.**

Exemple 10 Indiquer si les propositions sont vraies ou fausses.

- (la fonction $\ln$ est croissante) et (la fonction $\sin$ est paire) est
- (la fonction $\exp$ est croissante) et ($2 > 1$) est

PROPRIÉTÉS SUR LES ASSERTIONS LOGIQUES. Comment les opérations logiques précédemment définies se comportent-elles entre elles ? C'est ce que nous allons préciser dans les prochains exemples et les prochaines propositions.

Exemple 11 (Négation d'un ou/d'un et) Ecrire la négation des propositions suivantes :

- Soit P la proposition : « Je prends du fromage ou un dessert ».



- Soit Q la proposition : « Le pantalon est court et blanc ».



Proposition 3 | Négation d'un OU, négation d'un ET

Soient P et Q deux propositions.

- La proposition **non** (P **ou** Q) est :
- La proposition **non** (P **et** Q) est :

Preuve A l'aide de tables de vérité.

Les règles de distributivité vues pour les ensembles possèdent leurs analogues d'un point de vue « logique ».

Proposition 4 | Distributivité

Soient P et Q deux propositions.

- La proposition [P **et** (Q **ou** R)] est :
- La proposition [P **ou** (Q **et** R)] est :

Preuve A l'aide de tables de vérité.

Remarque 10 (Retenir la distributivité : analogie) Imaginez que le symbole **ou** est un $+$, et le symbole **et** un $\times$. La première formule de distributivité se réécrit alors :

$$P \times (Q + R) = (P \times Q) + (P \times R).$$

>_🔗 (Booléens) Les opérations « et » (**and**) « ou » (**or**) sur les booléens **True** et **False** existent déjà en Python, tout comme la négation (**not**). Voici quelques exemples.

```
>>> V_1 = 2**2 == 5
>>> V_2 = 3 <= 4
>>> V_1 and V_2
False
>>> V_1 or V_2
True
>>> not V_1
True
```

2.3. Implication

Que signifie en Mathématiques la notion d'implication? Par exemple, soit x un réel. Si x est supérieur ou égal à 2, alors x est différent de 1, ce que vous notiez peut-être déjà au lycée :

$$x \geq 2 \Rightarrow x \neq 1.$$

Cela nous donne une nouvelle proposition logique (une implication est soit vraie, soit fausse) formée ici à partir de « $x \geq 2$ » et « $x \neq 1$ ». Mais comment définir $P \Rightarrow Q$ de manière abstraite si P, Q sont deux propositions logiques? Il faut comprendre que la négation de l'implication $P \Rightarrow Q$ sera vraie si P est vraie et Q est fausse. Ce qui se note avec nos symboles logiques de la manière suivante :

$$\text{non } (P \Rightarrow Q) \quad \text{équivalent à} \quad P \text{ et } (\text{non } Q),$$

donc en prenant la négation :

$$(P \Rightarrow Q) \quad \text{équivalent à} \quad ((\text{non } P) \text{ ou } Q).$$

On a notre définition de l'implication.

Définition 17 | Implication

Soient P et Q deux assertions. On définit la proposition « P implique Q », notée $P \Rightarrow Q$, comme étant :

$$(\text{non } P) \text{ ou } Q.$$

Autrement dit, $P \Rightarrow Q$ est fausse si P est vraie et Q est fausse. On dit aussi « si P est vraie, alors Q est vraie ».

Pour prouver que la proposition « $P \Rightarrow Q$ » est vraie, on suppose que P est vraie et on montre que (nécessairement) Q est vraie aussi.

Exemple 12 Ecrire les phrases suivantes sous forme d'implication.

1. Pour tout $n \geq 10$, u_n est strictement positif.



2. Pour que $f(x) > 1$, il suffit que $x > 2$.



3. Pour que $f(x) > 1$, il faut que $x < 2$.

**Attention**

- Affirmer que l'implication : $P \Rightarrow Q$ est vraie n'implique ni que P est vraie, ni que Q est vraie. Il est parfaitement vrai que : « Si Pinocchio est président de la République, alors il est chef des armées », et pourtant Pinocchio n'est pas plus président de la République qu'il n'est chef des armées.
- Une implication : $P \Rightarrow Q$ peut être vraie alors que P et Q n'ont rien de commun, car après tout seules leurs valeurs de vérité comptent. Par exemple, il est vrai que : « Si $0 = 0$, alors les oiseaux ont des plumes ».

Note

Mais en Mathématiques, nous nous intéresserons le plus souvent à des assertions P, Q liées entre elles.

P	Q	non P	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	
V	F	F	
F	V	V	
F	F	V	

On peut aussi écrire la table de vérité de $P \Rightarrow Q$.

On pourra remarquer (ce qui peut paraître surprenant) que si P est fausse, l'implication $P \Rightarrow Q$ est toujours vraie. Ainsi, l'implication « si $0 \neq 0$, alors $0 = 0$ » est vraie!

NOTION DE CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE.

Exemple 13 (Un exemple en français) L'implication :

(S'il pleut alors le sol est mouillé)

est vraie. Dans cette implication :

- « il pleut » est une condition **suffisante** de l'humidité du sol (il peut être mouillé pour d'autres raisons...),
- « le sol est mouillé » est une condition **nécessaire** du passage de la pluie (on ne peut pas avoir de pluie sans que le sol soit mouillé).

De manière générale, lorsque l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie :

- Q est vraie dès que P est vraie donc **il suffit que** P soit vraie pour que Q le soit aussi :
 P est une condition **suffisante** pour avoir Q .
- Q est nécessairement vraie si P l'est donc si Q est fausse, P ne peut pas être vraie donc **il faut que** Q soit vraie pour que P le soit aussi :
 Q est une **condition nécessaire** pour avoir P .

Exemple 14 (Un exemple mathématique) Soit $x \in \mathbb{R}$. L'implication :

$$x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$$

est vraie.

- $x > 1$ est une condition suffisante de $x^2 > 1$ (si $x > 1$ est vérifiée $x^2 > 1$ l'est forcément) mais elle n'est pas nécessaire (en prenant par exemple $x = -2$, $x^2 > 1$ est vérifiée alors que $x > 1$ ne l'est pas.)
- $x^2 > 1$ est une condition nécessaire de $x > 1$ (il faut que $x^2 > 1$ soit vérifiée pour que $x > 1$ ait une chance de l'être) mais elle n'est pas suffisante (en prenant par exemple $x = -2$, $x^2 > 1$ est vérifiée alors que $x > 1$ ne l'est pas.)

NÉGATION, RÉCIPROQUE ET CONTRAPOSÉE D'UNE IMPLICATION

Proposition 5 | Négation d'une implication.

Soient P et Q deux propositions.

La négation de $P \Rightarrow Q$ est : **P et non (Q)**.

Preuve

Remarque 11 Notez que la négation d'une implication n'est pas une implication !

Exemple 15 Ecrire la négation de l'implication (vraie) : $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$.

Définition 18 | Réciproque

Soient P et Q deux propositions.

On définit la **réciproque** de $P \Rightarrow Q$ comme étant l'implication : $Q \Rightarrow P$.

Remarque 12 Si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, ce n'est pas forcément le cas pour la réciproque $Q \Rightarrow P$. Par exemple : pour $x \in \mathbb{R}$, l'implication :

$$(x = 1) \Rightarrow (x^2 = 1)$$

est vraie. Qu'en est-il de la réciproque ?

Définition/Proposition 1 | Contraposée

Soient P et Q deux propositions.

La **contraposée** de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication : **non (Q) $\Rightarrow$ non (P)**.

Une proposition et sa contraposée sont équivalentes.

Preuve

Exemple 16 Ecrire la contraposée de l'implication :
(S'il pleut alors le sol est mouillé).

On énonce aussi la propriété de transitivité de l'implication :

Proposition 6 | Transitivité de l'implication

Soient P, Q, R trois assertions. Alors

Si $\begin{cases} \text{(i)} & P \Rightarrow Q \text{ est vraie} \\ \text{(ii)} & Q \Rightarrow R \text{ est vraie} \end{cases}$ alors : $P \Rightarrow R$ est vraie.

Exemple 17 Soit $x \in \mathbb{R}$. Si on note P : « $x = 0$ », Q : « x est pair », R : « x est un entier relatif ». Alors $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow R$ et donc $P \Rightarrow R$.^a

2.4. Equivalence

Définition 19 | Opérateur d'« équivalence » $\Leftrightarrow$

Soient P et Q deux propositions.

La proposition $P \Leftrightarrow Q$ se lit « P équivaut à Q »

ou encore « P si et seulement si Q ».

Elle est vraie lorsque P et Q ont même valeur de vérité.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

^a. Bien sûr, nullement besoin de transitivité pour prouver cela...

L'équivalence joue, pour les propositions, le rôle que joue l'égalité pour les nombres : deux propositions sont équivalentes lorsqu'elles possèdent les mêmes valeurs de vérité.

Puisque la notation est bien choisie, on a la proposition ci-après.

Proposition 1 | Double implication

Soient P et Q deux propositions. Alors la proposition $(P \iff Q)$ est équivalente à :

$$(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P).$$

On dit aussi « P est vraie *si et seulement si* Q est vraie ».

Preuve Il suffit de construire la table de vérité associée à $(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)$.

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$P \iff Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

On retrouve bien que $P \iff Q$ est vraie uniquement lorsque P, Q ont même valeur de vérité,

Remarque 13 Ainsi, l'équivalence $P \iff Q$ est vraie si l'implication et sa réciproque sont vraies. On dit alors que P est une **condition nécessaire et suffisante** (parfois abrégé « CNS ») pour avoir Q .

Exemple 18 Indiquer si chacune des équivalences est vraie ou fausse (où x et y désignent des nombres réels).

1. $(x^2 = 1) \iff x = 1$.



2. $(x = y) \iff e^x = e^y$.



3. $(x = y) \iff \cos(x) = \cos(y)$.



3. QUANTIFICATEURS

Pour simplifier l'écriture des propositions on utilisera des symboles appelés quantificateurs.

Définition 20 | Quantificateurs

On appelle *quantificateur* les symboles ci-après :

- « $\forall$ » qui signifie « *pour tout* »,
- « $\exists$ » qui signifie « *il existe* »,
- « $\exists!$ » qui signifie « *il existe un unique* ».



Attention

Il faut bien comprendre la différence entre les quantificateurs « $\forall$ » et « $\exists$ » : il n'est pas du tout pareil de dire que « il existe une voiture jaune » ou « toutes les voitures sont jaunes ».

Remarque 14 (Les quantificateurs ne sont pas toujours formellement écrits)

Le quantificateur universel est parfois implicite dans les énoncés mathématiques. Par exemple, le « soit » cache souvent un « $\forall$ ».

Par exemple, l'énoncé « Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n(n+1)$ est pair » s'écrit :

$$\text{« } \forall n \in \mathbb{N}, \quad n(n+1) \text{ est pair ».}$$

On peut alors écrire des propositions logiques de manière plus condensée en utilisant ces symboles. .

Exemple 19 Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes.

- Le carré de tout nombre réel est positif.



- La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.



Exemple 20 Donner la valeur de vérité des propositions suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10.$



2. $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 10.$



3. $\forall x \in \mathbb{R}^*, x^2 > 0.$



4. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$



5. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 > 0.$



6. $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 > 0.$



7. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 0.$



⚠ Attention Rédaction : pas de mélange mots/quantificateurs

Quand on rédige des Mathématiques, on essaie de ne pas mélanger les mots et les symboles. Ainsi,

- « x^2 est positif $\forall x$ » est une **mauvaise** rédaction. 😞
- « x^2 est positif pour tout réel x » est une **bonne** rédaction 😍,
- « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ » est une **bonne** rédaction 😍.

De plus, les quantificateurs sont toujours placés avant la proposition à quantifier.

3.1. Place des quantificateurs

ORDRE DES QUANTIFICATEURS. Il est possible, et même fréquent en analyse, d'avoir plusieurs quantificateurs en cascade. On peut échanger deux quantificateurs identiques. Il est par exemple équivalent de dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+, x + y \geq 0, \quad \text{ou de manière condensée : } \forall x, y \in \mathbb{R}^+, x + y \geq 0.$$

⚠ Attention Ordre des quantificateurs de nature différente

L'ordre dans lequel sont écrits les quantificateurs de nature différente est **extrêmement** important.

- L'assertion « $\forall x > 0, \exists y > 0, y^2 = x$ » est vraie, elle signifie « tout réel strictement positif admet une racine carrée ».
- Alors que l'assertion « $\exists y > 0, \forall x > 0, y^2 = x$ » est fausse, elle signifie « il existe un nombre réel qui est la racine carrée de tous les nombres réels ».

En particulier un élément introduit par un symbole « il existe » ne peut dépendre que des éléments qui le précèdent.

Exemple 21 Indiquez la valeur de vérité des propositions P et Q.

- P : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x.$



- Q : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x.$



3.2. Quantificateurs et négation

Comment nier une assertion écrite à l'aide de quantificateurs ? On garde l'ordre des quantificateurs, on transforme tous les « $\exists$ » en « $\forall$ » et tous les « $\forall$ » en « $\exists$ » puis on nie les expressions mathématiques subséquentes. Par exemple, le contraire de « tous les chats sont mignons » est « il existe un chat qui n'est pas mignon ».

Proposition 7 | Négation et quantificateurs

Soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété dépendant de x .

- La proposition [**non** ($\forall x \in E, P(x)$)] est
- [**non** ($\exists x \in E, P(x)$)] est

Exemple 22 Nier les assertions suivantes.

- « Tout homme a les yeux verts ».



- « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ ».



- « $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x - 1| < \alpha \implies |\sqrt{x} - 1| < \varepsilon)$ ».

**Résumé Négation d'une proposition**

Pour nier une proposition :

- chaque « OU » est remplacé par un « ET »,
- chaque « ET » est remplacé par un « OU »,
- chaque « $\forall$ » est remplacé par un « $\exists$ »,
- chaque « $\exists$ » est remplacé par un « $\forall$ »,
- Chaque implication « $P \implies Q$ » est remplacée par « P et non(Q) ».

4.**DIFFÉRENTES TECHNIQUES DE PREUVE****4.1.****Sur l'existence/unicité de propositions****Cadre**

Dans toute cette sous-section, on considère une proposition $\mathcal{P}(x)$, x appartenant à un ensemble E .

**Méthode Montrer/Nier « $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ »**

- **[Montrer]** Il s'agit de trouver un exemple de $x \in E$ qui vérifie la propriété $\mathcal{P}(x)$.
- **[Nier]** D'après le cours de logique, il s'agit de montrer que **pour tout** $x \in E$, $\mathcal{P}(x)$ est fausse.

Exemple 23 Montrer que : $\exists x \in [0, 3], x^2 - 3x + 2 < 0$.

Remarque 15 Parfois, on pourra faire appel à un théorème qui prouvera l'existence d'un x vérifiant $\mathcal{P}(x)$ sans pour autant donner d'expression de x (par exemple, le théorème des valeurs intermédiaires pour justifier l'existence d'un nombre x tel que $f(x) = 0$ si f est une fonction).

**Méthode Montrer/Nier « $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ »**

- **[Montrer]**
 1. On commence par fixer un élément x de E avec lequel on va travailler. La rédaction type est donc : « Soit x un élément de E , montrons $\mathcal{P}(x)$ ».
 2. On démontre que $\mathcal{P}(x)$ est vraie par une suite de phrases qui commencent toutes par « Donc » ou « Or » (ou des connecteurs logiques).
 - ◊ Une phrase qui commence par « Donc » signifie qu'on fait une déduction.
 - ◊ Une phrase qui commence par « Or » signifie qu'on rappelle :
 - soit une hypothèse de l'énoncé,
 - soit un résultat qu'on a démontré avant dans la preuve.
 3. On écrit *toujours* à la fin de la preuve : « En conclusion, $\mathcal{P}(x)$ est vraie. ».
- **[Nier]** D'après le cours de logique, il s'agit de montrer qu'**il existe** $x \in E$, telle que $\mathcal{P}(x)$ soit fausse.

Exemple 24 Montrer que : $\forall x \geq 1, \quad x^2 \geq x$.



Méthode Montrer/Nier « $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$ »

● **[Montrer]**

1. **EXISTENCE** On montre l'existence d'un x vérifiant la propriété comme précédemment.
2. **UNICITÉ**
 - ◇ Soit on montre que la manière dont on a construit l'élément x vérifiant $\mathcal{P}(x)$ permet d'affirmer qu'il n'y a pas d'autre choix.
 - ◇ Soit on fixe deux éléments x_1 et x_2 de E tels que $\mathcal{P}(x_1)$ et $\mathcal{P}(x_2)$ sont vraies, et on démontre que $x_1 = x_2$ par une suite de phrases qui commencent toutes par « Donc » ou « Or ». La rédaction type est donc : « Soient x_1, x_2 deux éléments de E , montrons que $x_1 = x_2$ ».

- **[Nier]** Soit on justifie que l'existence est en défaut (voir les méthodes précédentes), soit que l'unicité est en défaut : auquel cas, on se cherche $x_1, \neq x_2 \in E$ de sorte que $\mathcal{P}(x_1), \mathcal{P}(x_2)$ soient vraies.

Remarque 16 L'existence et l'unicité peuvent aussi être démontrés d'un coup. Par exemple, en invoquant le théorème de la bijection pour les fonctions (voir cours de Terminale), on arrive à justifier l'existence et l'unicité de solutions à une équation.

Les exemples de ce type de preuve seront nombreux en fin d'année (notamment en Algèbre linéaire).



Cadre

Dans toute cette sous-section, on considère deux ensembles A, B inclus dans un ensemble E .



Méthode Montrer/Nier « $A \subset B$ »

- **[Montrer]** Pour montrer que $A \subset B$, on se fixe $a \in A$ quelconque et on montre que $a \in B$. Autrement dit, on montre que tout élément de A est élément de B . La rédaction type est donc « Soit $a \in A$, montrons que $a \in B$ ».
- **[Nier]** Il s'agit de montrer qu' il existe $a \in A$, tel que $a \notin B$.



Méthode Montrer/Nier « $A = B$ »

- **[Montrer]** On a deux possibilités.
 - ◇ **[Par double inclusion]** On montre souvent *via* deux étapes, avec une *double inclusion*, que $A \subset B$ et $B \subset A$.
 - ◇ **[Par équivalences]** On montre parfois l'équivalence ci-après :

$$x \in A \iff x \in B.$$
- **[Nier]** Il s'agit de montrer $A \not\subset B$ ou $B \not\subset A$ (voir la méthode précédente).

Exemple 25 Soient A et B les deux ensembles définis par

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y = 0 \text{ et } z = 0\}$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0 \text{ et } x - y + 3z = 0\}$$

Montrer que l'on a : $A = B$.



4.2. Démonstration par disjonction de cas



Méthode Disjonction de cas

On sépare la démonstration d'une propriété en sous-cas, chacun de ces sous-cas (qui doivent, bien sûr, recouvrir l'ensemble des possibilités) permettant d'exploiter des informations supplémentaires débloquent le raisonnement.

Exemple 26 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier.



Rappel (Valeur absolue) On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$, on note $|x|$ la valeur absolue de x définie par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$

Par exemple, $|2| = 2$ et $|-3| = 3$ (car $-3 < 0$ et $-(-3) = 3$). Par ailleurs, étant donnés a et b deux réels, on note $\max(a, b)$ le plus grand élément entre a et b . Par exemple : $\max(1, 3) = 3$.

Exemple 27 Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}$.



4.3. Démonstration par l'absurde



Méthode Comment démontrer par l'absurde?

On veut montrer une proposition P . On suppose non (P) et on montre que cela implique une proposition qui est fausse (ou « absurde »). Cela contredit l'hypothèse non (P) et par conséquent P est nécessairement vraie.

Exemple 28 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \quad \frac{x+1}{x+2} \neq 1$.



4.4. Démonstration de $P_1 \Rightarrow P_2$

PREMIÈRE MÉTHODE : PREUVE DIRECTE. On suppose que P_1 est vérifiée et on cherche alors à démontrer P_2 .

Exemple 29 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $(n \text{ pair}) \Rightarrow (n^2 \text{ pair})$.



DEUXIÈME MÉTHODE : PAR CONTRAPOSÉE. On raisonne par contraposée lorsque la contraposée « $\text{non}(P_2) \Rightarrow \text{non}(P_1)$ » est plus facile à démontrer que l'implication « $P_1 \Rightarrow P_2$ ».



Méthode Démontrer par contraposée

Principe : « $P_1 \Rightarrow P_2$ est équivalent à sa contraposée « $\text{non}(P_2) \Rightarrow \text{non}(P_1)$ ». On cherche donc à démontrer « $\text{non}(P_2) \Rightarrow \text{non}(P_1)$ ». Pour cela, on suppose $\text{non}(P_2)$ et on cherche alors à démontrer $\text{non}(P_1)$.

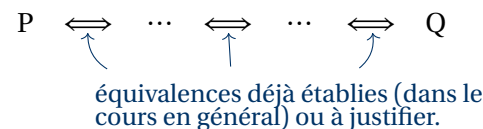
Exemple 30 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $(n^2 \text{ pair}) \Rightarrow (n \text{ pair})$. Qu'en déduit-on?



TROISIÈME MÉTHODE : PAR L'ABSURDE. On suppose P_1 et non (P_2) et l'on montre que l'on obtient alors un résultat absurde.

4.5. Démonstration de $P \Leftrightarrow Q$

DIRECTEMENT. On démontre une série d'équivalences $P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q$.



Exemple 31 Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $(4x(x-1) = -1) \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{2}\right)$.



EN UTILISANT UNE DOUBLE IMPLICATION. Pour montrer que $P_1 \Leftrightarrow P_2$, on peut démontrer que $P_1 \Rightarrow P_2$ puis que $P_2 \Rightarrow P_1$. Souvent, une implication est plus facile à montrer que l'autre. Pour l'implication la « plus difficile » (la moins directe), il faut parfois penser à raisonner par contraposée ou par l'absurde (comme par exemple pour démontrer l'implication : $(n \text{ pair}) \Leftrightarrow (n^2 \text{ pair})$).

Exemple 32 Démontrer l'équivalence suivante :

$(f \text{ est une fonction paire et impaire}) \iff (f \text{ est la fonction nulle}).$



4.7. Par récurrence

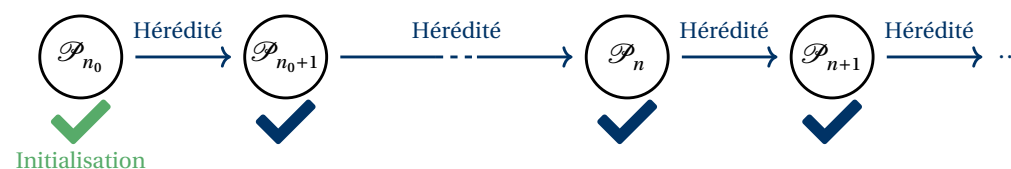
Il en existe différents types, l'objectif étant de démontrer des propositions dépendantes d'un entier naturel n . Les raisonnements par récurrence seront principalement fondés sur la propriété de transitivité de l'implication $\implies$.

Théorème 1 | Principe de récurrence simple

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Supposons que :

- **[Initialisation]** $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,
- **[Hérédité]** $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$.

Alors : pour tout entier $n \geq n_0$ l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie.



Remarque 17

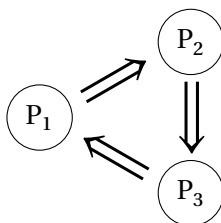
- Le principe de récurrence peut être vu comme le jeu qui consiste à faire tomber des dominos en cascade : pour que cela fonctionne, il faut s'assurer que chaque domino soit placé de sorte qu'il entraîne le suivant dans sa chute, c'est l'hérédité, et il faut aussi faire tomber le premier domino, c'est l'initialisation.
- Le raisonnement par récurrence est adapté à tous les objets mathématiques définis par récurrence (suites récurrentes par exemple). Le plus souvent, on vérifiera l'initialisation au rang $n_0 = 0$.

Attention

On ne fait **jamais** de récurrence pour prouver une propriété qui dépend d'un nombre réel.

4.6. Démonstration de $P_1 \iff P_2 \iff P_3$

Pour montrer que $P_1 \iff P_2 \iff P_3$, il suffit de montrer que : $P_1 \implies P_2 \implies P_3 \implies P_1$ (preuve cyclique).



Exemple 33 Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 1 \end{cases}$$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.



Initialisation.**Hérédité.****Exemple 34** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par récurrence par

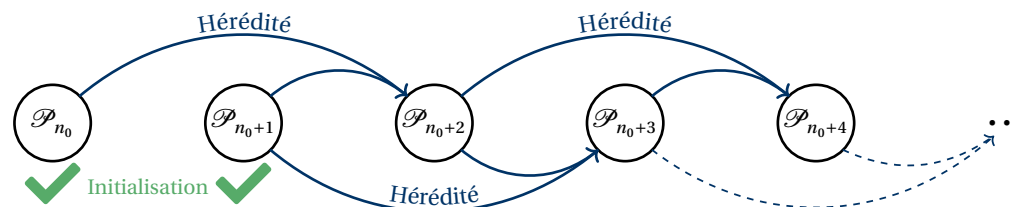
$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = 2u_n - 1. \end{cases}$$

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - 2^{n-1}$.**Initialisation.****Hérédité.****Attention à la rédaction d'une récurrence**

- Dans l'hérédité, on n'écrit **surtout pas** « Supposons que pour tout n , $\mathcal{P}(n)$ est vraie » — sinon la récurrence est terminée, c'est justement ce que l'on veut montrer.
- Une erreur moins grave à présent, mais c'est incorrect : « Supposons $\mathcal{P}(n)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. » Le problème est que la bonne traduction de « pour un certain $n \in \mathbb{N}$ » est « $\exists n, \mathcal{P}(n)$ est vraie », ce qui ne correspond pas au principe de récurrence.

Théorème 2 | Principe de récurrence doubleSoit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Supposons que :

- **[Initialisation (double)]** $\mathcal{P}(n_0), \mathcal{P}(n_0 + 1)$ sont vraies,
- **[Hérédité]** $\forall n \geq n_0, (\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n + 1)) \implies \mathcal{P}(n + 2)$.

Alors : pour tout entier $n \geq n_0$ l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple 35 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$.



Initialisation.



Hérédité.



Par principe de récurrence double, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

Théorème 3 | Principe de récurrence forte

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Supposons que :

Si $\underbrace{\mathcal{P}(n_0)}_{\text{initialisation}}$ est vraie et si : $\underbrace{\forall n \geq n_0, (\forall k \in \llbracket n_0, n \rrbracket, \mathcal{P}(k)) \implies \mathcal{P}(n+1)}_{\text{hérédité}}$,
alors : $\underbrace{\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \text{ est vraie.}}_{\text{conclusion}}$

Remarque 18 Finalement, on peut toujours utiliser une récurrence forte en lieu et place d'une double. Dans le cas d'une récurrence forte, on suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang ambiant alors que dans le cas d'une récurrence double on la suppose seulement vraie aux deux rangs précédents.

Exemple 36 (Suite définie par tous ses termes précédents) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = u_0 + \dots + u_n. \end{cases}$$

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n) : u_n = 2^{n-1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Indication : On pourra utiliser librement la formule suivante, que nous reverrons

plus tard : pour tout $q \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, $q^0 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Initialisation.



Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que les propriétés $\mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies et on va montrer qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.



Par principe de récurrence forte, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.

5. ALPHABET GREC

Cet alphabet, très souvent utilisé pour écrire des symboles mathématiques, compte vingt-quatre lettres minuscules et majuscules. Certaines majuscules se retrouvent dans l'alphabet latin.

Minuscules	Majuscules	Prononciation
α	A	alpha
β	B	beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε	E	epsilon
ζ	Z	zêta
η	H	êta
θ	Θ	thêta
ι	I	iota
κ	K	kappa
λ	Λ	lambda

μ	M	mu
ν	N	nu
ξ	Ξ	xi
ο	O	omicron
π	Π	pi
ρ	P	rho
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	upsilon
φ	Φ	phi
χ	X	chi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

En minuscules, on utilise en général vingt-un de ces vingt-quatre lettres, à l'exception des lettres ι, ο et υ. En effet ces lettres ressemblent trop aux lettres latines i,o et v. On veillera d'ailleurs à ne pas confondre la lettre grecque ω « *omega* » avec la lettre latine w.

En majuscules, on utilise les dix lettres qui ne font pas partie de l'alphabet latin. En l'occurrence, il s'agit de : Γ Δ Θ Λ Ξ Π Σ Φ Ψ Ω.

★★★ Fin du chapitre ★★★

La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Concernant les bases de la logique (définition et table)
 - l'équivalence ☐
 - la négation ☐
 - la conjonction ☐
 - la disjonction ☐
 - l'implication ☐
2. Concernant les ensembles (définition logique et visualisation en diagrammes) :
 - la notion d'ensemble ☐
 - l'union, l'intersection ☐
 - l'inclusion et le complémentaire ☐
3. Savoir utiliser les quantificateurs et rédiger des phrases sans mélanger texte et quantificateur ☐
4. Concernant les raisonnements, savoir maîtriser et rédiger :
 - le raisonnement direct ☐
 - le raisonnement par contraposée ☐
 - le raisonnement par l'absurde ☐
 - le raisonnement par disjonction de cas ☐
 - le raisonnement par analyse et synthèse ☐
 - le raisonnement par récurrence ☐

 : Cours –
  : Calcul –
  : Raisonnement
 : Modélisation –
  : Classique –
  : Plus difficile

6.1. Raisonnements, implication, équivalence

Exercice 1 |  **Solution** Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et écrire leur négation :

1. $(5 \in \mathbb{N})$ ou $(2 < 3)$
2. $(5 \in \mathbb{Z}_-)$ ou $(2 > 3)$
3. $(3 > 2)$ et $(2 + 3 = 4)$
4. $(3 > 2) \Rightarrow (2 + 3 = 4)$
5. $(3 > 2)$ et $(2 + 3 = 5)$
6. $(2 + 3 = 4) \Rightarrow (2 \leq 3)$

Exercice 2 |  **Solution** Compléter les pointillés par le connecteur logique $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ ou $\Leftarrow$ en justifiant votre choix (où x désigne un nombre réel).

1. $x^2 = 4$ $x = 2$.
2. $0 \leq x \leq 2$ $x^2 \leq 4$.
3. $x = \frac{\pi}{2}$ $\sin(x) = 1$.

Exercice 3 |  **Solution** Soient m et n deux entiers naturels. On considère les deux propositions suivantes :

P : « m et n sont deux entiers pairs »,

Q : « $m + n$ est un entier pair ».

A-t-on : $P \Rightarrow Q$? $Q \Rightarrow P$? $P \Leftrightarrow Q$?

Exercice 4 |  **Solution** Montrer que si x et y sont deux réels qui vérifient $x + y > 2$, alors au moins un des deux est strictement supérieur à 1.

Exercice 5 |  **Solution** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer l'équivalence suivante :
 $(x^2 + y^2 = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$.

Exercice 6 |  **Solution** On a démontré dans le cours que pour tout entier naturel n ,
 $(n^2 \text{ pair}) \Rightarrow (n \text{ pair})$.

En déduire, en utilisant un raisonnement par l'absurde, que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 7 |  **Solution** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n^2 + 1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 |  **Solution** Montrer que, pour tous réels x et y ,

$$\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

où $\min(x, y)$ désigne la plus petite valeur entre x et y (par exemple, $\min(1, 4) = 1$).

6.2. Utilisation des quantificateurs

Exercice 9 |  **Solution** Exprimer les énoncés suivants à l'aide de quantificateurs puis écrire leur négation :

1. n est un nombre entier naturel pair.
2. Il existe un réel strictement négatif dont le carré est strictement positif.
3. La fonction f est majorée sur I .

4. La fonction f est croissante sur I .
5. La suite u est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

Exercice 10 |  **Solution** Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Exprimer les négations des assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
2. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$

Exercice 11 |  **Solution** Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Donner leur négation.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0$.
2. $\exists y \in \mathbb{R}, y \geq 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$.
4. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, x = y^2$.
5. $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, x = y^2$.

Exercice 12 |  **Solution** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. écrire à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes puis les nier :

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.
4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
5. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par $m \in \mathbb{R}$.

6.3. Raisonnement par récurrence

RÉCURRENCES SIMPLES

Exercice 13 |  **Solution** Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n - 4. \end{cases}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = 2 \times 5^n + 1$.

Exercice 14 |  **Solution** Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $u_n \geq 2$.

Exercice 15 |  **Solution** Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 4n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Prouver par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n(n-1)$.

Exercice 16 |  **Solution** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, on a : $2^n > n$.

Exercice 17 |  **Solution** Montrer par récurrence que : $\forall n \geq 4, n^2 \leq 2^n$.
Indication : Dans l'hérédité, on cherchera à multiplier par 2 l'hypothèse de récurrence

Exercice 18 |  **Solution**

1. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1+na$.
2. Déduisez-en la justification d'un théorème (admis) en classe de Première :
si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Exercice 19 |  **Solution** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.

Rappel (Divisibilité)

Un nombre entier naturel m est divisible par 7 si il existe un entier naturel k tel que $m = 7k$.

Exercice 20 |  **Solution** La suite (u_n) est définie par $u_1 = 0$ et pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$.

Donnez la valeur exacte de u_{2023} .

RÉCURRENCES DOUBLES

Exercice 21 |  **Solution** On définit une suite u par : $u_0 = 2, u_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 2^n + 3^n$.

Exercice 22 |  **Solution** On définit une suite u par : $u_0 = 3, u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.

Exercice 23 |  **Solution** On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n+1} u_{n-1}.$$

Démontrer par récurrence double que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq u_n \leq n^2$.

RÉCURRENCES FORTES

Exercice 24 |  **Solution** On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{n+1} (u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2).$$

Calculer les premiers termes de la suite et conjecturer la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer cette conjecture par récurrence forte.

Exercice 25 |  **Solution** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par ses termes impairs et pairs :

$$u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} = 2u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n+1} = u_n + u_{n+1}.$$

Conjecturer la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis l'établir par récurrence forte.

6.4. Opérations sur les ensembles

Exercice 26 |  **Solution** Soient A, B et C trois ensembles inclus dans un ensemble E. Montrer que :

$$(a) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (b) \quad \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Exercice 27 |  **Solution** Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E.

Montrer que : si $A \subset B$, alors $\bar{B} \subset \bar{A}$.

Exercice 28 |  **Solution** Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que : $A = B \iff A \cup B = A \cap B$.

Exercice 29 |  **Solution** Montrer que

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 1\} = \{(x, 1 - 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Représenter graphiquement cet ensemble.

Exercice 30 |  **Solution** Soit $T > 0$. L'ensemble des fonctions T-périodiques est l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x).$$

Montrer que l'ensemble des fonctions 1-périodiques est inclus dans l'ensemble des fonctions 2-périodiques.

Solution (exercice 1) Énoncé

1. Cette proposition est vraie. Sa négation est :
($5 \notin \mathbb{N}$) et ($2 \geq 3$)
2. Cette proposition est fausse. Sa négation est :
($5 \in \mathbb{N}^*$) et ($2 \leq 3$)
3. Cette proposition est fausse. Sa négation est :
($3 \leq 2$) ou ($2 + 3 \neq 4$)
4. Cette proposition est fausse. Sa négation est :
($3 > 2$) et ($2 + 3 \neq 4$)
5. Cette proposition est vraie. Sa négation est :
($3 \leq 2$) ou ($2 + 3 \neq 5$)
6. Cette proposition est vraie. Sa négation est :
($2 + 3 = 4$) et ($2 > 3$)

Solution (exercice 2) Énoncé

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $x^2 = 4 \iff x = 2$.

Le sens réciproque est vrai par élévation au carré.

En revanche le sens direct est faux. Contre-exemple : $x = -2$ vérifie $x^2 = 4$ et $x \neq 2$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $0 \leq x \leq 2 \implies x^2 \leq 4$.

Le sens direct est valide par croissance de la fonction carré sur $[0, +\infty[$: en effet, si $0 \leq x \leq 2$, alors $0^2 \leq x^2 \leq 2^2$ donc, en particulier, $x^2 \leq 4$.

Le sens réciproque est faux. Contre-exemple : $x = -1$ vérifie $x^2 = 1$, donc $x^2 \leq 4$ mais on n'a pas : $0 \leq x \leq 2$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $x = \frac{\pi}{2} \implies \sin(x) = 1$.

Le sens direct est valide : si $x = \frac{\pi}{2}$, alors $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

En revanche, le sens réciproque est faux. Contre-exemple : si $x = \frac{5\pi}{2}$, on a $\sin(x) = 1$ tandis que x n'est pas égal à $\frac{\pi}{2}$.

Solution (exercice 3) Énoncé On a $\boxed{P \implies Q}$: en effet, si m et n sont pairs, alors il existe k et k' entiers tels que $m = 2k$ et $n = 2k'$. On a donc :

$$m + n = 2k + 2k' = 2(k + k'),$$

ce qui implique $m + n$ pair (car $k + k'$ est un entier).

Le sens réciproque est faux, $\boxed{Q \text{ n'implique pas } P}$. Pour contre exemple on peut choisir $m = 3$ et $n = 5$. On a $3 + 5 = 8$, ainsi 8 est pair alors que 3 et 5 sont impairs. On en déduit donc que $\boxed{\text{l'équivalence est fausse}}$.

Solution (exercice 4) Énoncé On cherche à montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x + y > 2 \implies x > 1 \text{ ou } y > 1).$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par contraposée, on suppose que $x \leq 1$ et $y \leq 1$. Par propriété sur les inégalités, on peut additionner terme à terme les inégalités, on obtient ainsi $x + y \leq 2$. Donc $\text{non}(x + y > 2)$ est vérifiée.

Conclusion : par contraposée, on a bien démontré

$$\boxed{(x + y > 2) \implies (x > 1 \text{ ou } y > 1.)}$$

On peut aussi raisonner par l'absurde.

Solution (exercice 5) Énoncé On montre l'équivalence par double implication.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $x = 0$ et $y = 0$. On a alors $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$. Ainsi, on a montré que $(x = 0 \text{ et } y = 0) \implies (x^2 + y^2 = 0)$.
- $\boxed{\Rightarrow}$ On raisonne par contraposée. On suppose que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$.
 - ◊ Cas 1 : si $x \neq 0$. Alors $x^2 > 0$, et de plus $y^2 \geq 0$. Donc par somme $x^2 + y^2 > 0$, et donc $x^2 + y^2 \neq 0$.
 - ◊ Cas 2 : si $y \neq 0$. Le même raisonnement donne $x^2 + y^2 \neq 0$.
 Ainsi, par contraposée, on a montré que $(x^2 + y^2 = 0) \implies (x = 0 \text{ et } y = 0)$.

Conclusion : on a bien démontré que

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x^2 + y^2 = 0) \iff (x = 0 \text{ et } y = 0).}$$

Remarque 19 On peut démontrer le sens direct sans utiliser de contraposée.

En effet, supposons que $x^2 + y^2 = 0$.

On sait que $x^2 \geq 0$ (un carré étant positif).

De plus, puisque $x^2 + y^2 = 0$, on a : $x^2 = -y^2$.

On en déduit que $x^2 \leq 0$ car $y^2 \geq 0$.

Ayant $x^2 \geq 0$ et $x^2 \leq 0$, on obtient : $x^2 = 0$, puis $x = 0$.

Sachant que $x^2 + y^2 = 0$ avec $x = 0$, on obtient $y^2 = 0$, d'où : $y = 0$.

Ainsi, $x = 0$ et $y = 0$.

Solution (exercice 6) Énoncé On suppose par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Ainsi, par définition de $\mathbb{Q}$, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et on peut de plus supposer que p et q sont tels que la fraction est irréductible.

On a alors, en élevant au carré que $p^2 = 2q^2$, ainsi p^2 est pair et d'après la pro-

priété démontrée en cours, on sait alors que p est pair. Ainsi, il existe $p' \in \mathbb{Z}$, tel que $p = 2p'$. On a donc $(2p')^2 = 2q^2$, soit $4(p')^2 = 2q^2$, puis en simplifiant $q^2 = 2(p')^2$ et q^2 est ainsi pair. Puis, q est pair. Contradiction car on a supposé la fraction $\frac{p}{q}$ irréductible.

Ainsi, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Solution (exercice 7) **Énoncé** Comme dans un exemple du cours, on raisonne par disjonction de cas suivant la parité de n .

- **[1^{er} cas.]** Si n est pair, il existe un entier naturel k tel que : $n = 2k$.
Ainsi, on a :

$$\frac{n(n^2 + 1)}{2} = \frac{2k((2k)^2 + 1)}{2} = k(4k^2 + 1) \in \mathbb{N}.$$

- **[2nd cas.]** Si n est impair, il existe un entier naturel k tel que : $n = 2k + 1$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \frac{n(n^2 + 1)}{2} &= \frac{(2k + 1)((2k + 1)^2 + 1)}{2} \\ &= \frac{(2k + 1)(4k^2 + 4k + 1 + 1)}{2} \\ &= \frac{(2k + 1)(4k^2 + 4k + 2)}{2} \\ &= \frac{(2k + 1) \times 2 \times (2k^2 + 2k + 1)}{2} \\ &= (2k + 1)(2k^2 + 2k + 1) \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Par disjonction de cas, on a bien démontré que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n(n^2 + 1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Solution (exercice 8) **Énoncé** Comme dans le cours, on raisonne par disjonction de cas suivant le signe de $x - y$.

- **[1^{er} cas.]** si $x - y \geq 0$, à savoir si $x \geq y$, on a :

$$\frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y - (x - y)}{2} = \frac{x + y - x + y}{2} = \frac{2y}{2} = y,$$

sachant que : $\min(x, y) = y$ puisque $x \geq y$.

On a bien montré que : $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$.

- **[2nd cas.]** Si $x - y < 0$, à savoir si $x < y$, on a :

$$\frac{x + y - |x - y|}{2} = \frac{x + y - (-(x - y))}{2} = \frac{x + y + x - y}{2} = \frac{2x}{2} = x,$$

sachant que : $\min(x, y) = x$ puisque $x < y$.

On a bien montré que : $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$.

Dans tous les cas ; on a : $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$.

Solution (exercice 9) **Énoncé**

1. La proposition s'écrit : $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$.
La négation de cette proposition est : $\forall k \in \mathbb{N}, n \neq 2k$.
2. La proposition s'écrit : $\exists x \in \mathbb{R}_+, x^2 > 0$.
La négation de cette proposition est : $\forall x \in \mathbb{R}_+, x^2 \leq 0$.
3. La proposition s'écrit : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) \leq M$.
La négation de cette proposition est : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) > M$.
4. La proposition s'écrit : $\forall (a, b) \in I^2 (a \leq b \implies f(a) \leq f(b))$
La négation de cette proposition est : $\exists (a, b) \in I^2, a \leq b$ et $f(a) > f(b)$.
5. La proposition s'écrit : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$.
La négation de cette proposition est : $\forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, u_n \neq u_{n_0}$.

Solution (exercice 10) **Énoncé**

1. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
2. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$.
3. $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y$ et $f(x) > f(y)$

Solution (exercice 11) **Énoncé**

1. Faux, on peut prendre comme contre exemple $x = -1$.
Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x < 0$.
2. Vrai, on peut prendre par exemple $y = 1$.
Négation : $\forall y \in \mathbb{R}, y < 0$.
3. Vrai : soit $x \in \mathbb{R}^+$. Comme x est positif, on peut poser $y = \sqrt{x}$. On a bien alors $y^2 = x$. On remarque que l'on peut également prendre $y = -\sqrt{x}$.
Négation : $\exists x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}, x \neq y^2$.
4. Faux : soit $y \in \mathbb{R}$ quelconque. On cherche un réel x tel que $x \neq y^2$. Il suffit de prendre par exemple $x = y^2 + 1$. On a bien alors $x \neq y^2$.
Remarquons que les deux propriétés 3. et 4. diffèrent seulement par l'ordre dans lequel on a défini x et y .
Négation : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}^+, x \neq y^2$.
5. Faux : soit $x \in \mathbb{R}^+$ quelconque. Si pour tout réel y on avait $x = y^2$, alors en particulier, pour $y = 0$ on aurait $x = 0$, et pour $y = 1$ on aurait $x = 1$. Ceci est absurde.

Négation : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists y \in \mathbb{R}, x \neq y^2$.

Solution (exercice 12) Énoncé

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$
Négation : $\exists n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$
Négation : $\exists n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$
Négation : $\exists n \in \mathbb{N}, u_n \neq u_0$
- $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
Négation : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$
Négation : $\exists n \in \mathbb{N}, u_n < m$.

Solution (exercice 13) Énoncé Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n) : u_n = 2 \times 5^n + 1$

Initialisation. On a : $2 \times 5^0 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$ avec $u_0 = 3$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$ (à savoir : $u_n = 2 \times 5^n + 1$). Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (à savoir, montrons que $u_{n+1} = 2 \times 5^{n+1} + 1$). On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5u_n - 4 \\ &= 5 \times (2 \times 5^n + 1) - 4 \quad \text{hypothèse de récurrence} \\ &= 2 \times 5^{n+1} + 5 - 4 \\ &= 2 \times 5^{n+1} + 1. \end{aligned}$$

D'où le résultat par récurrence.

Solution (exercice 14) Énoncé Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n) : u_n \geq 2$.

Initialisation. On a : $u_1 = 5$ avec $5 \geq 2$, donc $u_1 \geq 2$ et $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$ (à savoir : $u_n \geq 2$). Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (à savoir, montrons que $u_{n+1} \geq 2$).

Puisque $u_n \geq 2$, on a : $u_n + 2 \geq 4$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante sur $[0, +\infty[$, on obtient :

$$\sqrt{u_n + 2} \geq \sqrt{4}$$

ce qui donne, sachant que $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et que $\sqrt{4} = 2$:

$$u_{n+1} \geq 2,$$

d'où le résultat par récurrence.

Solution (exercice 15) Énoncé

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n) : u_n = 2n(n-1)$.

Initialisation. Lorsque $n = 0$, on a bien : $2 \times 0 \times (0-1) = 0 = u_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 4n \\ &= 2n(n-1) + 4n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 2n^2 - 2n + 4n \\ &= 2n^2 + 2n \\ &= 2n(n+1) \quad \text{en factorisant par } 2n \\ &= 2(n+1)(n+1-1). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'où le résultat par le principe de récurrence.

Solution (exercice 16) Énoncé Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n) : 2^n > n$.

Initialisation. Pour $n = 1$, on a : $2^1 = 2$ donc $2^1 > 1$ et l'initialisation est vérifiée.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$. Ainsi, on a :

$$2^n > n.$$

En multipliant par deux des deux côtés de l'inégalité, on obtient :

$$2^{n+1} > 2n.$$

Il suffit de démontrer l'inégalité : $2n \geq n+1$ pour conclure.

Or, puisque $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n \geq 1$ donc $n + n \geq n + 1$, d'où : $2n \geq n + 1$.

Ainsi, on a : $2^{n+1} > 2n \geq n + 1$, d'où : $2^{n+1} > n + 1$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, d'où le résultat par le principe de récurrence.

Solution (exercice 17) Énoncé

Initialisation. Pour $n = 4$, la propriété est $4^2 = 16 \leq 2^4 = 16$. Elle est donc vérifiée.

Hérédité. Supposons-là vraie en un rang $n \geq 4$, c'est-à-dire que $n^2 \leq 2^n$. Alors en multipliant l'hypothèse de récurrence par 2, on déduit :

$$2n^2 \leq 2^{n+1}.$$

Il suffit alors d'établir que $(n+1)^2 \leq 2n^2$, cela impliquera que $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$.

Mais

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \leq 2n^2 \iff 2n + 1 \leq n^2 \\ &\iff 0 \leq n^2 - 2n - 1. \end{aligned}$$

De plus, le discriminant de $x \mapsto x^2 - 2x - 1$ est 8, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 2x - 1 = (x - (1 + \sqrt{2}))(x - (1 - \sqrt{2})).$$

Mais, $1 + \sqrt{2} \approx 2.41$, le trinôme précédent est positif à l'extérieur des racines, et $n \geq 4$ donc $n^2 - 2n - 1$ est positif. C'est terminé. Par principe de récurrence, on a établi :

$$\boxed{\forall n \geq 4, \quad n^2 \leq 2^n}.$$

Remarque 20 Vous pouvez retrouver la correction de cet exercice dans cette vidéo :



Solution (exercice 18) Énoncé

1. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n) : (1 + a)^n \geq 1 + na$.

Initialisation. Pour $n = 0$, la propriété est $(1 + a)^0 = 1 \geq 1$, elle est donc vérifiée.

Hérédité. Supposons-là vraie au rang n , c'est-à-dire $(1 + a)^n \geq 1 + na$. Alors

$$\begin{aligned} (1 + a)^{n+1} &= (1 + a)^n(1 + a) \\ &\geq (1 + a)(1 + na) \quad \text{hypothèse de récurrence (et car } 1 + a \geq 0) \\ &= 1 + na + a + na^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)a + 0. \quad \text{car } na^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + a)^n \geq 1 + na}.$$

Remarque 21 Vous pouvez retrouver la correction de cette question dans cette vidéo :



2. Soit $q > 1$. Alors, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $q = 1 + a$ (avec $a = q - 1$). L'inégalité démontrée à la question précédente donne :

$$q^n \geq 1 + na.$$

Sachant que $a > 0$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$.

Ainsi, par comparaison : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty}$

Solution (exercice 19) Énoncé

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathcal{P}(n) : 3^{2n+2} - 2^{n+1} \text{ est divisible par 7.}$$

Initialisation. Lorsque $n = 1$, on a :

$$3^{2 \times 1 + 2} - 2^{1+1} = 3^4 - 2^2 = 81 - 4 = 77 = 7 \times 11$$

avec $11 \in \mathbb{Z}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7, il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3^{2n+2} - 2^{n+1} = 7k$. Ainsi :

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)+2} - 2^{(n+1)+1} &= 3^{2n+4} - 2^{n+2} \\ &= 3^2(3^{2n+2} - 2^{n+1}) + 3^2 \times 2^{n+1} - 2^{n+2} \\ &= 3^2 \times 7k + 2^{n+1} \times (9 - 2) \\ &= 7 \times (9k + 2^{n+1}) \end{aligned}$$

avec $9k + 2^{n+1} \in \mathbb{Z}$ puisque $k \in \mathbb{Z}$. D'où $3^{2(n+1)+2} - 2^{(n+1)+1}$ est divisible par 7. D'où le résultat voulu pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence.

Solution (exercice 20) Énoncé

Calculons les premiers termes de la suite :

$$\begin{aligned} \bullet \quad u_2 &= \frac{1}{2 - u_1} = \frac{1}{2 - 0} = \frac{1}{2}, \\ \bullet \quad u_3 &= \frac{1}{2 - u_2} = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}, \\ \bullet \quad u_4 &= \frac{1}{2 - u_3} = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

etc. On conjecture alors que $u_n = \frac{n-1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrons cette conjecture par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n) : u_n = \frac{n-1}{n}$.

Initialisation. On a : $\frac{1-1}{1} = 0 = u_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$. On obtient alors :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n} = \frac{1}{2 - \frac{n-1}{n}} = \frac{1}{\frac{2n - (n-1)}{n}} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1) - 1}{n+1},$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'où le résultat par le principe de récurrence.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n-1}{n}$. Ainsi : $\boxed{u_{2023} = \frac{2022}{2023}}$

Solution (exercice 21) Énoncé Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n) : u_n = 2^n + 3^n$.

● **Initialisation.** pour $n = 0$ et pour $n = 1$:

- ◇ D'un côté, par définition de la suite, on sait que $u_0 = 2$. De l'autre côté, on a : $2^0 + 3^0 = 1 + 1 = 2$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- ◇ D'un côté, par définition de la suite, on sait que $u_1 = 5$. De l'autre côté, on a : $2^1 + 3^1 = 2 + 3 = 5$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n et $n + 1$, vérifions que $\mathcal{P}(n + 2)$ est vraie.

Par définition de la suite, on sait que : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n = 2^n + 3^n$ et que $u_{n+1} = 2^{n+1} + 3^{n+1}$. Ainsi on obtient que :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\ &= 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n) \\ &= 5 \times (2 \times 2^n + 3 \times 3^n) - 6 \times 2^n - 6 \times 3^n \\ &= 10 \times 2^n + 15 \times 3^n - 6 \times 2^n - 6 \times 3^n \\ &= 4 \times 2^n - 9 \times 3^n \\ &= 2^2 \times 2^n - 3^2 \times 3^n \\ &= 2^{n+2} - 3^{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n + 2)$ est vraie.

Conclusion : il résulte du principe de récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = 2^n + 3^n$.

Solution (exercice 22) Énoncé Montrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : $\mathcal{P}(n) : u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.

● **Initialisation :** pour $n = 0$ et pour $n = 1$:

- ◇ D'un côté, par définition de la suite, on sait que $u_0 = 3$. De l'autre côté, on a : $2^1 + (-1)^0 = 2 + 1 = 3$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- ◇ D'un côté, par définition de la suite, on sait que $u_1 = 3$. De l'autre côté, on a : $2^2 + (-1)^1 = 4 - 1 = 3$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

● **Hérédité :**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n et $n + 1$, vérifions que $\mathcal{P}(n + 2)$ est vraie.

Par définition de la suite, on sait que : $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$. Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$ et que $u_{n+1} = 2^{n+2} + (-1)^{n+1}$. Ainsi

on obtient que :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2^{n+2} + (-1)^{n+1} + 2(2^{n+1} + (-1)^n) \\ &= 2^{n+2} + (-1)^{n+1} + 2^{n+2} + 2(-1)^n \\ &= 2^{n+2}(1 + 1) + (-1)^n(-1 + 2) \\ &= 2^{n+3} + (-1)^n \end{aligned}$$

Or $(-1)^{n+2} = (-1)^n \times (-1)^2 = (-1)^n$. Ainsi on a : $u_{n+2} = 2^{n+3} + (-1)^{n+2}$.

Ainsi $\mathcal{P}(n + 2)$ est vraie.

Conclusion : il résulte du principe de récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = 2^{n+1} + (-1)^n$.

Solution (exercice 23) Énoncé

Initialisation. ($n = 1$ et $n = 2$) $u_1 = 1$ et $1 \leq 1 \leq 1^2$ donc $1 \leq u_1 \leq 1^2$.

$u_2 = u_{1+1} = u_1 + \frac{2}{1+1}u_0 = 2$ et $1 \leq 2 \leq 2^2 = 4$ donc $1 \leq u_2 \leq 2^2$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que $1 \leq u_n \leq n^2$ et $1 \leq u_{n+1} \leq (n+1)^2$.

Montrons que $1 \leq u_{n+2} \leq (n+2)^2$.

D'après la relation définissant la suite, $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n$.

Par ailleurs, $1 \leq u_{n+1} \leq (n+1)^2$ et $1 \leq u_n \leq n^2 \Rightarrow \frac{2}{n+2} \leq \frac{2}{n+2}u_n \leq \frac{2n^2}{n+2}$.

Par somme d'inégalités, on obtient que

$$1 + \frac{2}{n+2} \leq u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n \leq (n+1)^2 + \frac{2n^2}{n+2}$$

c'est-à-dire

$$1 + \frac{2}{n+2} \leq u_{n+2} \leq (n+1)^2 + \frac{2n^2}{n+2}.$$

Comme $1 + \frac{2}{n+2} \geq 1$, on obtient bien que $u_{n+2} \geq 1$.

D'autre part, il suffit de montrer pour conclure que $(n+1)^2 + \frac{2n^2}{n+2} \leq (n+2)^2$, ce qui revient à montrer que :

$$(n+2)^2 - \left((n+1)^2 + \frac{2n^2}{n+2} \right) \geq 0$$

Or,

$$(n+2)^2 - \left((n+1)^2 + \frac{2n^2}{n+2} \right) = (n+2)^2 - (n+1)^2 - \frac{2n^2}{n+2}$$

$$\begin{aligned}
&= \cancel{n^2} + 4n + 4 - \cancel{n^2} - 2n - 1 - \frac{2n^2}{n+2} \\
&= 2n + 3 - \frac{2n^2}{n+2} \\
&= \frac{(2n+3)(n+2) - 2n^2}{n+2} \\
&= \frac{2n^2 + 4n + 3n + 6 - 2n^2}{n+2} \\
&= \frac{7n+6}{n+2}.
\end{aligned}$$

Or, $n \geq 0$ donc $\frac{7n+6}{n+2} \geq 0$, d'où :

$$(n+2)^2 - \left((n+1)^2 + \frac{2n^2}{n+2} \right) \geq 0$$

ce qui donne : $u_{n+2} \leq (n+2)^2$

D'après le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq u_n \leq n^2$.

Solution (exercice 24) Énoncé

On a : $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{0+1}(1^2) = 1$, $u_1 = \frac{1}{1+1}(1^2 + 1^2) = 1$,

$$u_2 = \frac{1}{2+1}(1^2 + 1^2 + 1^2) = 1.$$

On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

Démontrons ce résultat par récurrence forte.

Initialisation. ($n = 0$) On a bien $u_0 = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $u_k = 1$, i.e. $u_0 = u_1 = u_2 = \dots = u_n = 1$

Montrons que $u_{n+1} = 1$.

On a

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2) = \frac{1}{n+1} \left(\underbrace{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2}_{n+1 \text{ termes}} \right) = \frac{n+1}{n+1} = 1.$$

D'après le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

Solution (exercice 25) Énoncé Calculons les premiers termes afin d'établir une conjecture. On a

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 2u_1 = 2$$

$$u_3 = 1 + 2 = 3$$

$$u_4 = 2u_2 = 4.$$

On conjecture que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n$. Montrons cette propriété par récurrence forte.

Initialisation. La propriété est initialisée pour $n = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $u_k = k$ pour tout $k = 1, \dots, n$, et montrons que $u_{n+1} = n+1$ par disjonction de cas. Alors

- si n est pair, il existe un entier k de sorte que $n = 2k$, alors $u_{n+1} = u_{2k+1} = u_k + u_{k+1} = k + k + 1$ par hypothèse de récurrence, donc $u_{n+1} = 2k + 1 = n + 1$, la propriété est démontrée.
- Si n est impair, il existe un entier k de sorte que $n = 2k + 1$, alors $u_{n+1} = u_{2k+2} = u_{2(k+1)} = 2u_{k+1} = 2(k+1)$ par hypothèse de récurrence, donc $u_{n+1} = 2k + 2 = n + 1$, la propriété est démontrée.

En conclusion, par principe de récurrence forte, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = n.$$

Solution (exercice 26) Énoncé

- **[a]** On a :

$$x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A \text{ et } (x \in B \cup C)$$

$$\iff x \in A \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C)$$

$$\iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ et } x \in C) \quad \left. \begin{array}{l} \text{le ET est distributif sur le} \\ \text{OU} \end{array} \right\}$$

$$\iff (x \in A \cap B) \text{ ou } (x \in A \cap C)$$

$$\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

D'où le résultat.

- **[b]** On a :

$$x \in \overline{(A \cap B)} \iff \text{non}(x \in (A \cap B))$$

$$\iff \text{non}(x \in A \text{ et } x \in B)$$

$$\iff \text{non}(x \in A) \text{ ou } \text{non}(x \in B)$$

$$\iff x \in \bar{A} \text{ ou } x \in \bar{B}$$

$$\iff x \in \bar{A} \cup \bar{B}.$$

D'où le résultat.

Solution (exercice 27) Énoncé Soit $x \in E$ tel que $x \notin B$. Montrons que $x \notin A$.
Supposons par l'absurde que : $x \in A$. D'après l'inclusion $A \subset B$, on a alors : $x \in B$.
Cela est absurde car x n'appartient pas à B .
Ainsi, on a bien $x \in \bar{A}$, d'où : $\bar{B} \subset \bar{A}$.

Solution (exercice 28) Énoncé On procède par double implication.

$\Rightarrow$ Supposons que $A = B$. Montrons que $A \cup B = A \cap B$. Mais $A \cup B = A \cup A = A$, $A \cap B = A \cap A = A$, donc $A \cup B = A \cap B$.

$\Leftarrow$ Supposons que $A \cap B = A \cup B$. Alors montrons que $A = B$ par double inclusion.

$\subset$ Soit $x \in A$, alors $x \in A \cup B = A \cap B$ par hypothèse, donc $x \in A$ et $x \in B$. En particulier, $x \in B$.

$\supset$ S'obtient de la même manière par symétrie des rôles entre A et B .

Conclusion $\boxed{A = B \iff A \cup B = A \cap B}$.

Solution (exercice 29) Énoncé

Notons $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 1\}$, et $B = \{(x, 1 - 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

$\subset$ Soit $(x, y) \in A$. Alors $2x + y = 1$ et $y = 1 - 2x$. Donc $(x, y) = (x, 1 - 2x) \in B$.

$\supset$ Soit $(x, y) \in B$. Alors $(x, y) = (x, 1 - 2x)$ donc $y = 1 - 2x$ et donc $(x, y) \in A$.

En conclusion : $\boxed{A = B}$. On reconnaît la droite d'équation $y = -2x + 1$ donc d'ordonnée à l'origine 1 et de coefficient directeur -2 .

Solution (exercice 30) Énoncé Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 1-périodique. Montrons que f est une fonction 2-périodique.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x+2) &= f((x+1)+1) && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{car } f \text{ est 1-périodique} \\ &= f(x+1) && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{car } f \text{ est 1-périodique} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Ainsi, f est 2-périodique et on a bien démontré l'inclusion demandée.