Devoir maison # 1
Pour le lundi 18/09/2023

Consignes

- Les devoirs maison sont facultatifs. Pour autant, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.**

Exercice 1 | Quantificateurs. Solution Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. f n'est pas une fonction constante.
2. f ne prend jamais deux fois la même valeur.
3. la fonction f présente un minimum.
4. f prend des valeurs arbitrairement grandes.
5. la fonction f prend toute valeur réelle.
6. la fonction f ne peut s'annuler qu'en 0.

Exercice 2 | Etude d'une proposition. Solution On considère la proposition

$$\mathscr{P} : \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \left(x + y = 1 \implies x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}\right).$$

1. Écrire la négation de $\mathscr{P}$.
2. **2.1)** Écrire la contraposée de l'implication figurant dans $\mathscr{P}$.
   2.2) Écrire la réciproque de l'implication figurant dans $\mathscr{P}$.
3. Montrer, **par une preuve directe**, que la proposition $\mathscr{P}$ est vraie. *Indication : On pourra considérer les développements de $(x+y)^2$ et de $(x-y)^2$.*

Exercice 3 | Une récurrence simple. Solution

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{n+1}{2^{n+1}}. \end{cases}$

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite (les fractions seront écrites sous forme irréductible).
2. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$ *(on rendra bien garde aux « parenthèses cachées » lors des calculs avec les fractions ! Ne confondez pas $a - b + c$ et $a - (b + c)$ si a, b et c sont trois réels.)*

CORRECTION

Solution (exercice 1) Énoncé

1. f n'est pas une fonction constante :
$$\boxed{\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) \neq f(y)}$$
2. f ne prend jamais deux fois la même valeur :
$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x \neq y \implies f(x) \neq f(y))}$$
3. la fonction f présente un minimum :
$$\boxed{\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant f(m)}$$
4. f prend des valeurs arbitrairement grandes :
$$\boxed{\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant \mathrm{M}}$$
5. la fonction f prend toute valeur réelle :
$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x)}$$
6. la fonction f ne peut s'annuler qu'en 0 :
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f(x) = 0 \implies x = 0)}$$

Solution (exercice 2) Énoncé

1. La négation de $\mathscr{P}$ est $\boxed{\overline{\mathscr{P}}: \quad \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x+y=1)\ \underline{\textbf{et}}\ \left(x^2+y^2 < \frac{1}{2}\right)}$
2. **2.1)** $\boxed{\left(x^2+y^2 < \frac{1}{2}\right) \implies (x+y \neq 1)}$

   2.2) $\boxed{\left(x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}\right) \implies (x+y = 1)}$
3. Soient x et y deux réels tels que $(x+y)=1$.
En élevant au carré cette égalité, on obtient :
$$(x+y)^2 = 1, \quad \text{à savoir :} \quad x^2+2xy+y^2 = 1.$$
En outre, on a : $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.
En regroupant les deux informations précédemment surlignées, on obtient :
$$\begin{cases} 1 & = x^2+2xy+y^2 \\ (x-y)^2 & = x^2-2xy+y^2. \end{cases}$$
En additionnant terme à terme ces deux égalités (de sorte que les termes $2xy$ « s'éliminent »), on obtient :
$$1 + (x-y)^2 = 2(x^2+y^2)$$
Sachant que $(x-y)^2 \geqslant 0$ (en tant que carré), on obtient :
$$2(x^2+y^2) \geq 1, \quad \text{donc :} \quad x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}, \quad \text{car } 2 > 0.$$
On obtient bien : $\boxed{x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}}$.

Solution (exercice 3) Énoncé

1. On a :
$$\begin{cases} u_0 = \boxed{0}, \\ u_1 = u_0 + \frac{1}{2^1} = 0 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}, \\ u_2 = u_1 + \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1}, \\ u_3 = u_2 + \frac{3}{2^3} = 1 + \frac{3}{8} = \boxed{\frac{11}{8}}, \\ u_4 = u_3 + \frac{4}{2^4} = \frac{11}{8} + \frac{4}{16} = \frac{11}{8} + \frac{2}{8} = \boxed{\frac{13}{8}} \end{cases}$$
2. On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathscr{P}(n)$: $u_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Initialisation. $2 - \frac{0+2}{2^0} = 2-2 = 0 = u_0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On a, par définition de la suite :
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \quad \textit{Par hypothèse de récurrence} \\ &= 2 - \frac{2n+4}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\ &= 2 - \left(\frac{2n+4}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^{n+1}}\right) \\ &= 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}, \end{aligned}$$
donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
D'où le résultat par le principe de récurrence.