Devoir sur table # 2
14/10/2023 – Durée : 3h00

Consignes. *Les cinq exercices sont indépendants.*

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

*Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les encadrant, en les surlignant ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction. L'usage de la calculatrice est strictement **interdit**.*

Exercice 1 | Equations et inéquations Solution

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in-)équations suivantes.

1. $\sqrt{3-3x} = 2x+1$
2. $x-1 \geqslant \dfrac{1}{x-1}$
3. $|1-x| = 2x-3$
4. $\dfrac{2\sin(3x)}{\sqrt{3}} = 1$
5. $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$

Exercice 2 | Limites d'une fonction. Solution

Soit f la fonction définie par $\quad f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x + x^4}{x-2}\right)$.

1. Vérifier que f est bien définie sur $]2, +\infty[$.
2. Déterminer : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 3 | Limites et parties entières. Solution

1. Définir la partie entière d'un nombre réel y.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$.

 2.1) Calculer $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f(2)$ et $f(10)$. Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

 2.2) Montrer que : $\forall x > 0, \quad 1 - x < x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor \leq 1$.

 2.3) En déduire : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

 2.4) Déterminer de même : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

 2.5) La fonction f possède-t-elle une limite en 0 ?

Exercice 4 | Inéquations trigonométriques. Solution

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2. **2.1)** Rappeler la formule d'addition pour $\cos(x+y)$, avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

 2.2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Ecrire sous la forme d'un seul cosinus l'expression :
 $$\cos(\theta) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right).$$

 2.3) Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation d'inconnue $\theta \in]-\pi;\pi]$:
 $$\cos(\theta) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) > \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Exercice 5 | Suites et trigonométrie. Solution

On considère un réel $\alpha_0 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et on définit la suite (u_n) par
$$u_0 = \sin(\alpha_0) \quad \text{et :} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1-u_n}{2}}.$$

1. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1$.
2. Dans cette question seulement, $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{6}$. Calculer u_0 et u_1, et conjecturer la valeur de u_n pour tout entier naturel n. Montrer cette conjecture par récurrence.
3. Dans cette question, $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{3}$.
 On définit alors la suite (α_n) par :
 $$\alpha_0 = \frac{\pi}{3} \quad \text{et :} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_n}{2}.$$

 3.1) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6}$.

 3.2) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

 3.3) Justifier que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \cos(2\alpha_{n+1}) = \sin(\alpha_n)$.

 3.4) Soit a un nombre réel. Rappeler l'expression de $\cos(2a)$ en fonction de $\sin^2 a$.
 En déduire que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sin^2(\alpha_{n+1}) = \dfrac{1-\sin(\alpha_n)}{2}$.

 3.5) Montrer par récurrence que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sin(\alpha_n)$.

Lycée Camille GUÉRIN – Poitiers

Correction du devoir surveillé 2

14/10/2023 – Durée : 3h00

Solution (exercice 1) Énoncé

1. Notons (E_1) : $\sqrt{3-3x} = 2x+1$. On résout (E_1) sur $\mathscr{D}_1$, avec :

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_1 &= \{x \in \mathbb{R} \mid 3-3x \geq 0\}\\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}\\ &=]-\infty, 1].\end{aligned}$$

En outre, si $2x+1<0$, *i.e.* si $x < -\dfrac{1}{2}$, l'équation n'admet pas de solution par positivité d'une racine carrée.

Ainsi, soit $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$. Par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}_1) &\iff 3-3x = (2x+1)^2\\ &\iff 3-3x = 4x^2+4x+1\\ &\iff 4x^2+7x-2 = 0\end{aligned}$$

Le discriminant associé au trinôme $4x^2+7x-2$ vaut

$$\begin{aligned}\Delta &= 7^2 - 4\times 4\times(-2)\\ &= 49+32\\ &= 81.\end{aligned}$$

Ayant $\Delta > 0$, ce trinôme possède deux racines réelles distinctes qui sont

$$x_1 = \frac{-7-\sqrt{81}}{8} = \frac{-7-9}{8} = -2, \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7+\sqrt{81}}{8} = \frac{-7+9}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Seule la solution $\dfrac{1}{4}$ est dans le domaine de résolution de l'équation.

Ainsi : $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$

2. Notons (I_1) : $x-1 \geqslant \dfrac{1}{x-1}$. On résout (I_1) sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Soit $x \neq 1$. On a :

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}_1) &\iff x-1-\frac{1}{x-1} \geq 0\\ &\iff \frac{(x-1)^2-1}{x-1} \geq 0 \qquad \textit{car } a^2-b^2 = (a-b)(a+b)\\ &\iff \frac{x(x-2)}{x-1} \geq 0\end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
signe de x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\frac{x(x-2)}{x-1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

D'où : $\mathscr{S} = [0,1[\cup[2,+\infty[$

3. Notons (E_2) : $|1-x| = 2x-3$.

On résout (E_2) sur $\mathbb{R}$.

- Si $x \leqslant 1$ alors $1-x \geq 0$, d'où :

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}_1) &\iff 1-x = 2x-3\\ &\iff x = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

  Cette valeur est incompatible avec $x \leq 1$!

- Si $x > 1$, alors $1-x<0$, d'où :

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}_1) &\iff x-1 = 2x-3\\ &\iff x = 2.\end{aligned}$$

En résumé : $\mathscr{S} = \{2\}$

4. Notons (E_3) : $\dfrac{2\sin(3x)}{\sqrt{3}} = 1$.

On résout (E_3) sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}_3) &\iff \sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\iff \sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ 3x = \frac{\pi}{3}+2k\pi \ \underline{\textbf{ou}}\ \exists k \in \mathbb{Z},\ 3x = \pi - \frac{\pi}{3}+2k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \ \underline{\textbf{ou}}\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{2\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\end{aligned}$$

D'où : $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

5. Notons (E_4) : $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a : $\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2}+k\pi \iff x = \pi+2k\pi$.

Ainsi, on résout (E_4) sur $\mathscr{D}_4 = \mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi\}$.

Soit $x \in \mathscr{D}_4$. On a :

$$(E_4) \iff \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Les solutions trouvées appartiennent bien au domaine de résolution de l'équation. Ainsi :

$$\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Solution (exercice 2) Énoncé

1. On a :

$$\mathscr{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{e^x + x^4}{x-2} > 0 \ \underline{\textbf{et}}\ x - 2 \neq 0\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 2 > 0\} =]2, +\infty[,$$

car $e^x + x^4 > 0$ sur $\mathbb{R}$ (ayant $e^x > 0$ et $x^4 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$).

2. • $\boxed{\textit{Etude de la limite en } +\infty.}$ Soit $x > 0$. On a :

$$\frac{e^x + x^4}{x-2} = \frac{e^x\left(1 + \frac{x^4}{e^x}\right)}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{e^x}{x} \cdot \frac{1 + \frac{x^4}{e^x}}{1 - \frac{2}{x}}.$$

Par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0$.

Ainsi, par opérations sur les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} \cdot \frac{1 + \frac{x^4}{e^x}}{1 - \frac{2}{x}}\right) = +\infty$.

Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$, donc par composition de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

• $\boxed{\textit{Etude de la limite en } 2^+.}$ On a :

$$\lim_{x\to2^+} (e^x + x^4) = e^2 + 16, \quad \text{et} \quad \lim_{x\to2^+} (x-2) = 0^+, \quad \text{donc :} \quad \lim_{x\to2^+} \left(\frac{e^x + x^4}{x-2}\right) = +\infty.$$

Or, $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$, donc par composition de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty}$.

Solution (exercice 3) Énoncé

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. La partie entière de y, notée $\lfloor y \rfloor$, est **<u>l'unique entier relatif</u>** vérifiant l'encadrement : $\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$.

2. **2.1)** On a :

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) & = \frac{1}{2}\lfloor 2 \rfloor = \frac{1}{2} \times 2 = 1, \\ f(1) & = 1\lfloor 1 \rfloor = 1^2 = 1, \\ f(2) & = 2\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 2 \times 0 = 0, \\ f(10) & = 10\left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor = 10 \times 0 = 0. \end{cases}$$

On remarque que si $x > 1$, alors : $0 \leq \frac{1}{x} < 1$, donc : $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$. On en déduit que pour tout $x > 1$, $f(x) = 0$. Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

2.2) Soit $y \in \mathbb{R}$. Par la définition de la partie entière écrite en question **1.**, on a l'encadrement :

$$\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1.$$

Cela permet d'obtenir un encadrement de $\lfloor y \rfloor$:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y.$$

Ainsi, on obtient (en remplaçant y par $\frac{1}{x}$ si $x \in \mathbb{R}^*$) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} \qquad (\clubsuit)$$

Si $x > 0$, en multipliant l'inégalité précédente membre à membre par x (ce qui ne change pas le sens des inégalités puisque $x > 0$), on obtient l'inégalité voulue :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad 1 - x < x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1}$$

2.3) Puisque : $\lim\limits_{x\to0^+} (1-x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} 1 = 1$, d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 1}$

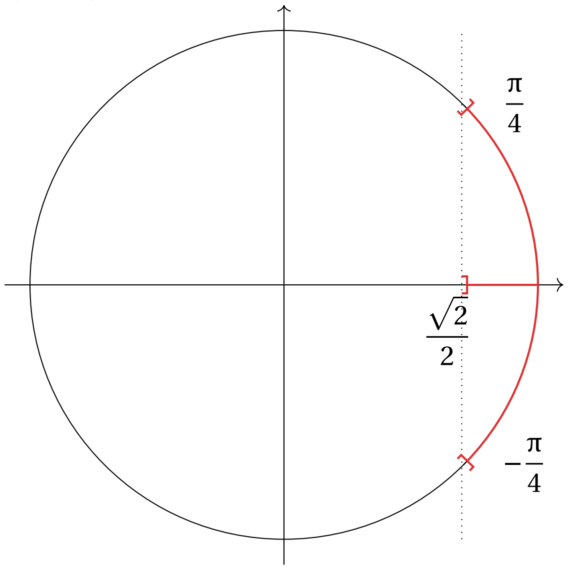
2.4) Soit $x < 0$. Reprenons l'encadrement $(\clubsuit)$, et multiplions chaque membre de l'inégalité par $x < 0$ ce qui change alors le sens des inégalités pour obtenir :

$$1 - x > x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq 1.$$

Sachant que : $\lim\limits_{x\to0^-} (1-x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^-} 1 = 1$, d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 1}$

2.5) Ayant : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 1$ avec f non définie en 0, on en déduit que f possède une limite en 0 qui vaut 1 : $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1}$.

Solution (exercice 4) Énoncé



1. Faisons un dessin.
On lit immédiatement que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2} &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad -\frac{\pi}{4}+2k\pi < \theta+\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}+2k\pi\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad -\frac{5\pi}{12}+2k\pi < \theta < \frac{\pi}{12}+2k\pi.\end{aligned}$$

Ainsi, sur $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{5\pi}{12}+2k\pi, \frac{\pi}{12}+2k\pi\right[$$

2. 2.1) D'après le cours, on a : $\boxed{\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y}$.

2.2) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors en utilisant la formule de la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) &= \cos\theta+\cos\theta\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &= \cos\theta+\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\\ &= \frac{3}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta.\end{aligned}$$

Or : $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3}$. D'où :

$$\begin{aligned}\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\\ &= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\theta-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\theta\right)\\ &= \boxed{\sqrt{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}\end{aligned}$$

2.3) Soit $\theta \in]-\pi,\pi]$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) > \sqrt{\frac{3}{2}} &\iff \sqrt{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\ &\iff \cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}\\ &\iff \cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Or, d'après la question **1**, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de cette inéquation est $\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{5\pi}{12}+2k\pi, \frac{\pi}{12}+2k\pi\right[$.
Ce n'est qu'en considérant la valeur $k=0$ que l'on obtient un intervalle de solutions compris dans $]-\pi,\pi]$. Ainsi :

$$\mathscr{S}_{]-\pi,\pi]} = \left]-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right[$$

Solution (exercice 5) Énoncé

1. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n) :\ 0 \leq u_n \leq 1$.

Initialisation. Pour $n=0$, on a $u_0 = \sin(\alpha_0)$ avec $\alpha_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ainsi, $\sin(\alpha_0) \geq 0$ $\left(\text{car } \alpha_0 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ et $\sin(\alpha_0) \leq 1$ (le sinus d'un angle étant inférieur ou égal à 1), donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$, de sorte que $0 \leq u_n \leq 1$.
On obtient :

$$-1 \leq -u_n \leq 0, \quad \text{puis :}\quad 0 \leq 1-u_n \leq 1, \quad \text{d'où :}\quad 0 \leq \frac{1-u_n}{2} \leq \frac{1}{2},$$

car $2>0$. On obtient, sachant que $\frac{1}{2} \leq 1$: $\quad 0 \leq \frac{1-u_n}{2} \leq 1$.

Par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$0 \leq \sqrt{\frac{1-u_n}{2}} \leq \sqrt{1}, \quad \text{d'où :}\quad 0 \leq u_{n+1} \leq 1.$$

donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. D'où le résultat par le principe de récurrence.

2. On a $u_0 = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, puis :

$$u_1 = \sqrt{\frac{1-u_0}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

On conjecture alors que la suite (u_n) est constante égale à $\frac{1}{2}$, ce que l'on va démontrer par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{H}(n)$ la proposition : $u_n = \frac{1}{2}$.

Initialisation. Pour $n = 0$, $u_0 = \frac{1}{2}$ d'après le calcul précédent donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathscr{H}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1-u_n}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2},$$

donc $\mathscr{H}(n+1)$ est vraie. D'où le résultat par le principe de récurrence.

3. 3.1) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{T}(n) : \alpha_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$.

Initialisation. $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = \alpha_0$, donc $\mathscr{T}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathscr{T}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\alpha_{n+1} &= \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_n}{2} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) \quad \textit{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{\pi}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{12} \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{T}(n+1)$ est vraie. D'où le résultat par le principe de récurrence.

3.2) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{V}(n) : -\frac{\pi}{2} \leq \alpha_n \leq \frac{\pi}{2}$.

Initialisation. Ayant $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$, $\mathscr{V}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathscr{V}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$ de sorte que :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_n \leq \frac{\pi}{2}.$$

En multipliant membre à membre par $-\frac{1}{2} < 0$:

$$-\frac{\pi}{4} \leq -\frac{\alpha_n}{2} \leq \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi :

$$0 \leq \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_n}{2} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}.$$

D'où :

$$0 \leq \alpha_{n+1} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Donc $\mathscr{V}(n+1)$ est vraie. D'où le résultat par le principe de récurrence.

> **Remarque 1** En adaptant un peu cette récurrence, on peut montrer une inégalité un peu plus fine (ce qui sera utile pour conclure la toute dernière question), à savoir : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

3.3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sachant que $\alpha_{n+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_n}{2}$, en multipliant par deux des deux côtés de l'égalité, on a :

$$2\alpha_{n+1} = \frac{\pi}{2} - \alpha_n, \quad \text{d'où :} \quad \cos(2\alpha_{n+1}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_n\right).$$

Or, pour tout nombre réel x, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ (vous pouvez tracer le cercle trigonométrique pour vous en convaincre !).

Ainsi : $\boxed{\cos(2\alpha_{n+1}) = \sin(\alpha_n)}$.

3.4) On a : $\boxed{\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En remplaçant a dans cette relation par α_{n+1}, on obtient :

$$\cos(2\alpha_{n+1}) = 1 - 2\sin^2(\alpha_{n+1}).$$

Or, d'après la question précédente, $\cos(2\alpha_{n+1}) = \sin(\alpha_n)$. On obtient :

$$\sin(\alpha_n) = 1 - 2\sin^2(\alpha_{n+1}).$$

En isolant $\sin^2(\alpha_{n+1})$ dans cette dernière égalité, on obtient le résultat voulu : $\boxed{\sin^2(\alpha_{n+1}) = \frac{1-\sin(\alpha_n)}{2}}$.

3.5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{R}(n)$ la proposition : $u_n = \sin(\alpha_n)$.

Initialisation. Par hypothèse, $u_0 = \sin(\alpha_0)$, donc $\mathscr{R}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathscr{R}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sqrt{\frac{1-u_n}{2}} \\
&\qquad \textit{Hypothèse de récurrence} \\
&= \sqrt{\frac{1-\sin(\alpha_n)}{2}} \\
&\qquad \textit{car } \frac{1-\sin(\alpha_n)}{2} = \sin^2(\alpha_{n+1}) \\
&= \sqrt{\sin^2(\alpha_{n+1})} \\
&\qquad \textit{car } \sqrt{X^2} = |X| \textit{ pour tout nombre réel } X. \\
&= |\sin(\alpha_{n+1})|.
\end{aligned}$$

Or, d'après la remarque de la correction de la question **3.2)**, on a :

$$\alpha_{n+1} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{donc} \quad \sin(\alpha_{n+1}) \geq 0.$$

Ainsi : $u_{n+1} = \sin(\alpha_{n+1})$. Donc $\mathscr{R}(n+1)$ est vraie.

D'où le résultat par le principe de récurrence.