Devoir maison 2
Pour le lundi 09 octobre

Consignes

- Les devoirs maison sont facultatifs. Pour autant, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.**

Exercice 1 | Equations et inéquations. Solution Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)-équations suivantes.

1. $|x-1| = 2x-3$
2. $\sqrt{2x+1} = 1-x$
3. $\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = 3$
4. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}} < 1$
5. $\lfloor 2x+1 \rfloor = 0$

Exercice 2 | Une suite récurrente. Solution On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [0;1], \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n+1}{2}}. \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.
2. On pose $u_0 = \cos(\varphi)$ avec $\varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right).$$

Exercice 3 | Trigonométrie. Solution

1. **1.1)** Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que :
$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)].$$
   1.2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\cos\alpha + \cos 5\alpha = 2\cos(2\alpha)\cos(3\alpha)$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
   2.1) Montrer que : $\sin(3\alpha) = (2\cos(2\alpha)+1)\sin\alpha$.
   2.2) En déduire que : $\cos\alpha + \cos(3\alpha) + \cos(5\alpha) = \dfrac{\sin(6\alpha)}{2\sin\alpha}$.
3. À l'aide de ce qui précède, déterminer la valeur du réel :
$$A = \cos^2\left(\frac{\pi}{14}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{14}\right).$$

CORRECTION

Solution (exercice 1) Énoncé

1. Notons (E_1) : $|x-1| = 2x-3$.
   On résout (E_1) sur $\mathbb{R}$.
   - Si $x \geqslant 1$ alors :
   $$(\mathrm{E}_1) \iff x-1 = 2x-3 \iff x = 2.$$
   - Si $x < 1$ alors
   $$(\mathrm{E}_1) \iff 1-x = 2x-3 \iff x = \frac{4}{3}.$$
   Cette valeur incompatible avec $x < 1$!

   Finalement : $\boxed{\mathscr{S} = \{2\}}$
2. Notons (E_2) : $\sqrt{2x+1} = 1-x$. On résout (E_2) sur
   $$\mathscr{D}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x+1 \geq 0\} = \boxed{\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[}.$$
   Soit $x \geqslant -\frac{1}{2}$.
   - Si $x > 1$ alors l'équation $\sqrt{2x+1} = 1-x$ n'a pas de solution car $1-x < 0$.
   - Si $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, alors :
   $$\begin{aligned}\sqrt{2x+1} = 1-x &\iff 2x+1 = (1-x)^2 \quad \text{car } x \mapsto x^2 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\\ &\iff 2x+1 = x^2-2x+1\\ &\iff x^2-4x = 0\\ &\iff x(x-4) = 0\\ &\iff x = 0 \quad \text{car } x \leqslant 1\end{aligned}$$

   Finalement : $\boxed{\mathscr{S} = \{0\}}$
3. Notons (E_3) : $\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = 3$. On résout (E_3) sur $[3, +\infty[$.
   Soit $x \geq 3$. Par stricte croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$,
   $$\begin{aligned}\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = 3 &\iff \left(\sqrt{x-3} + \sqrt{x}\right)^2 = 9\\ &\iff x-3+2\sqrt{x(x-3)} + x = 9\\ &\iff 2x-3+2\sqrt{x^2-3x} = 9\\ &\iff \sqrt{x^2-3x} = 6-x.\end{aligned}$$
   Ainsi, si $6-x < 0$, *i.e.* si $x > 6$, alors l'équation (E_3) n'a pas de solution (car une racine carrée est positive).
   Si $x \leq 6$, à savoir si $x \in [3, 6]$, alors $6-x \geq 0$ et par stricte croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$:
   $$\begin{aligned}(\mathrm{E}_4) &\iff x^2-3x = (6-x)^2\\ &\iff \cancel{x^2}-3x = \cancel{x^2}-12x+36\\ &\iff 9x = 36\\ &\iff x = 4.\end{aligned}$$
   Ayant $4 \in [3, 6]$, on a : $\boxed{\mathscr{S} = \{4\}}$
4. Notons (I_1) : $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} < 1$.

   On résout (I_1) sur $\mathscr{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x+1}{x+2} \geq 0 \text{ et } x \neq -2\right\}$.
   Un tableau de signes fournit : $\mathscr{D} = -]\infty, -2[\cup[-1, +\infty[$.
   Pour tout $x \in]-\infty, -2[\cup[-1, +\infty[$, par stricte croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$:
   $$\begin{aligned}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} < 1 &\iff \frac{x+1}{x+2} < 1\\ &\iff \frac{x+1}{x+2} - 1 < 0\\ &\iff \frac{x+1-(x+2)}{x+2} < 0\\ &\iff -\frac{1}{x+2} < 0\\ &\iff \frac{1}{x+2} > 0\\ &\iff x+2 > 0\\ &\iff x > -2.\end{aligned}$$
   On obtient : $\boxed{\mathscr{S} = [-1, +\infty[}$
5. Notons (E_4) : $\lfloor 2x+1 \rfloor = 0$. On résout (E_4) sur $\mathbb{R}$.

   $$\begin{aligned}(\mathrm{E}_4) &\iff 0 \leqslant 2x+1 < 1\\ &\iff -\frac{1}{2} \leqslant x < 0.\end{aligned}$$
   Ainsi : $\boxed{\mathscr{S} = \left[-\frac{1}{2}, 0\right[}$

Solution (exercice 2) Énoncé

1. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: $0 \leq u_n \leq 1$.

Initialisation. Par hypothèse, $u_0 \in [0,1]$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$ de sorte que $0 \leq u_n \leq 1$. On obtient :

$$1 \leq u_n + 1 \leq 2, \quad \text{puis :} \quad \frac{1}{2} \leq \frac{u_n+1}{2} \leq 1,$$

car $2 > 0$. On en déduit que : $0 \leq \dfrac{u_n+1}{2} \leq 1$.

Par croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$\sqrt{0} \leq \sqrt{\frac{u_n+1}{2}} \leq \sqrt{1}, \quad \text{d'où :} \quad 0 \leq \sqrt{\frac{u_n+1}{2}} \leq 1.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. D'où le résultat par le principe de récurrence.

2. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{H}(n)$: $\cos\left(\dfrac{\varphi}{2^n}\right)$.

Initialisation. On a : $\cos\left(\dfrac{\varphi}{2^0}\right) = \cos(\varphi) = u_0$, donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathscr{H}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$. D'après la relation de récurrence définissant la suite (u_n), on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{\frac{u_n+1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)+1}{2}}. \end{aligned}$$

Hypothèse de récurrence

Or, pour tout nombre réel X, on a : $\cos^2(X) = \dfrac{1+\cos(2X)}{2}$. En évaluant cette relation en $X = \dfrac{\varphi}{2^{n+1}}$, on obtient : $\cos^2\left(\dfrac{\varphi}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1+\cos\left(\frac{\varphi}{2^n}\right)}{2}$. D'où :

$$u_{n+1} = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2^{n+1}}\right)}.$$

Or, $\varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\dfrac{\varphi}{2^n} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, d'où : $\cos\left(\dfrac{\varphi}{2^{n+1}}\right) \geq 0$.

Ainsi : $u_{n+1} = \cos\left(\dfrac{\varphi}{2^{n+1}}\right)$.

Donc $\mathscr{H}(n+1)$ est vraie. D'où le résultat par le principe de récurrence.

Solution (exercice 3) Énoncé

1. **1.1)** Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{cases} \cos(a+b) & = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) & = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$$

En sommant ces égalités :

$$\boxed{\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]}.$$

1.2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. En prenant $a = 3\alpha$ et $b = 2\alpha$ dans la question précédente,

$$\begin{aligned} \cos\alpha + \cos 5\alpha &= \cos(3\alpha+2\alpha) + \cos(3\alpha-2\alpha) \\ &= \boxed{2\cos(2\alpha)\cos(3\alpha)} \end{aligned}$$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$.

2.1) On a :

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \sin(\alpha + 2\alpha) && \text{car } \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ &= \sin\alpha\cos(2\alpha) + \sin(2\alpha)\cos\alpha && \text{car } \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ &= \sin\alpha\cos(2\alpha) + 2\sin\alpha\cos^2\alpha && \text{car } \cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= \sin\alpha\cos(2\alpha) + \sin\alpha(\cos(2\alpha)+1) \\ &= \boxed{(2\cos(2\alpha)+1)\sin\alpha} \end{aligned}$$

2.2) En commençant par utiliser la question **1.2)**,

$$\begin{aligned} \cos\alpha + \cos(3\alpha) + \cos(5\alpha) &= 2\cos(2\alpha)\cos(3\alpha) + \cos(3\alpha) \\ &= \cos(3\alpha)(2\cos(2\alpha)+1) && \text{d'après la question 2.1)} \\ &= \cos(3\alpha)\frac{\sin(3\alpha)}{\sin\alpha} && \text{car } \sin\alpha \neq 0 \\ &= \boxed{\frac{\sin(6\alpha)}{2\sin\alpha}} && \text{car } \sin(6\alpha) = 2\sin(3\alpha)\cos(3\alpha) \end{aligned}$$

D'autres méthodes sont possibles !

3. En utilisant la formule de duplication des angles $\left(\text{à savoir, pour tout } X \in \mathbb{R}, \cos^2 X = \dfrac{1+\cos(2X)}{2}\right)$, on commence par linéariser les trois termes :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left[3 + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{14}\right) + \cos\left(2 \times \frac{3\pi}{14}\right) + \cos\left(2 \times \frac{5\pi}{14}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[3 + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)\right]. \end{aligned}$$

On applique alors la question précédente avec $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$ et on obtient alors :

$$A = \frac{1}{2}\left[3 + \frac{\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)}\right].$$

En remarquant alors que $\sin\left(\dfrac{6\pi}{7}\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{7}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$, on obtient :

$$A = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}. \text{ Ainsi : } \quad \boxed{A = \frac{7}{4}}$$