Devoir maison 3
Pour le lundi 06 novembre

Consignes

- Les devoirs maison sont facultatifs. Pour autant, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.**

Exercice 1 | Fonctions trigonométriques. [Solution] Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\cos x - \cos(3x).$$

1. Étudier la parité de f, et montrer que f est 2π-périodique. Expliquer pourquoi l'étude de f peut être alors restreinte à l'intervalle $[0,\pi]$.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 6\cos(2x)\sin(x)$. Étudier alors les variations de f sur $[0,\pi]$.
4. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en $x = \pi/2$. Déterminer les abscisses réelles pour lesquelles la tangente est horizontale.
5. Représenter f sur l'intervalle $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Exercice 2 | Étude des fonctions trigonométriques hyperboliques. [Solution] On considère les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. **[Étude des deux fonctions]**
   - **1.1)** Étudier la parité des fonctions ch et sh.
   - **1.2)** Justifier la dérivabilité des deux fonctions sur $\mathbb{R}$. Exprimer la dérivée de la fonction sh à l'aide de la fonction ch. Exprimer de même la dérivée de la fonction ch en fonction de la fonction sh.
   - **1.3)** Étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des deux fonctions.
   - **1.4)** À l'aide d'une étude de signe de $\mathrm{ch}(x)$ sur $\mathbb{R}$, dresser le tableau de variation de la fonction sh.
   - **1.5)** À l'aide d'une étude de signe de $\mathrm{sh}(x)$ sur $\mathbb{R}$, dresser le tableau de variation de la fonction ch.
   - **1.6)** Déterminer les équations des tangentes aux graphes de ch et sh au point d'abscisse 0.
   - **1.7)** Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_{\mathrm{ch}}$ et $\mathscr{C}_{\mathrm{sh}}$, *i.e.* le signe de $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$ sur $\mathbb{R}$, représentant respectivement les fonctions ch et sh.
   - **1.8)** A l'aide de toutes les informations obtenues aux questions précédentes, tracer sur un même repère les courbes représentatives des fonctions ch et sh.
2. **[Quelques égalités type trigonométriques]**
   - **2.1)** Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)$.
   - **2.2)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}^2(x) = \mathrm{ch}(2x)$.
   - **2.3)** Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)$.
   - **2.4)** Soient a et b deux réels. Exprimer $\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$ comme une fonction de $a - b$.

Exercice 3 | Listes. [Solution] Écrire une fonction `croissante(L)` qui retourne `True` si la liste d'entiers `L` est croissante, `False` sinon. Par exemple, `croissante([0,1,3,3,5])` renvoie `True`, tandis que `croissante([0,3,5,4,5])` renvoie `False`.

Exercice 4 | Dominos [Solution] On appelle « domino » un couple de deux entiers naturels distincts compris entre zéro et six (on a éliminé du jeu les « doubles » pour simplifier). Chaque domino est représenté en Python par une liste de deux entiers distincts compris entre 0 et 6.

1. Écrire une fonction `estChaine` d'argument une liste de dominos qui renvoie un booléen indiquant si cette liste forme une chaîne ou pas, sachant que deux dominos consécutifs forment un maillon de la chaîne si et seulement si le deuxième numéro du premier et le premier numéro du second sont identiques. Par exemple, `estChaine([[1,6],[6,4],[4,3]])` donne `True` alors que `estChaine([[1,6],[4,6]])` donne `False`.
2. Écrire une fonction `posable` de deux arguments, un domino `d` et une chaîne `C` de dominos, qui renvoie un booléen indiquant si le domino `d` peut être posé sur la liste `C`, c'est-à-dire rajouté en début ou en fin de liste (en ayant été retourné si besoin), ou pas. Par exemple, cette fonction renvoie `True` pour `d = [3,4]` et `C = [[1,2],[2,4]]`, mais renvoie `False` pour `d=[2,3]` et `C = [[1,2],[2,5],[5,4]]`.
3. Écrire une fonction `effectifs` d'argument une liste quelconque de dominos et qui renvoie la liste `[n_0, n_1, ..., n_6]` où `n_i` désigne le nombre de dominos contenant le nombre i (où $i \in [\![0,6]\!]$).

Par exemple, `effectifs([[0,2],[2,3],[2,5],[4,5]])` donne `[1,0,3,1,1,2,0]`.

CORRECTION

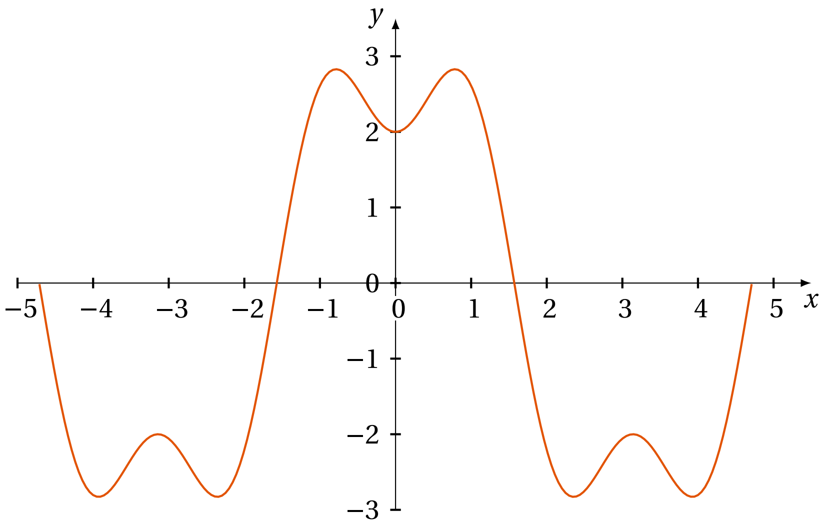
Solution (exercice 1) Énoncé

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
   - Etude de la parité : pour tout $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et :
     $$\begin{aligned} f(-x) &= 3\cos(-x) - \cos(-3x) \\ &= 3\cos x - \cos(3x), \end{aligned}$$
     car la fonction cos est paire.
     Ainsi, $f(-x) = f(x)$, et la fonction f est paire sur $\mathbb{R}$.
   - Etude de la périodicité : vérifions que la fonction est 2π périodique. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
     $$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= 3\cos(x+2\pi) - \cos(3(x+2\pi)) \\ &= 3\cos(x+2\pi) - \cos(3x+6\pi) \\ &= 3\cos x - \cos(3x) \\ &= f(x), \end{aligned}$$
     en utilisant la 2π périodicité de la fonction cosinus. Ainsi la fonction f est 2π périodique.

   Par 2π périodicité, on peut restreindre l'étude à tout intervalle d'amplitude 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$. Puis par parité, on peut restreindre l'intervalle à $[0, \pi]$. La courbe $\mathscr{C}_f$ sera alors obtenue par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et somme de telles fonctions. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$f'(x) = -3\sin x + 3\sin(3x)$$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned} f'(x) &= 3(\sin(3x) - \sin(x)) \\ &= 3(\sin(2x+x) - \sin(x)) \\ &= 3(\sin(2x)\cos(x) + \sin(x)\cos(2x) - \sin(x)) \\ &= 3\left(2\sin(x)\cos^2(x) + \sin(x)\cos(2x) - \sin(x)\right) \\ &= 3\sin(x)\left(2\cos^2(x) + \cos(2x) - 1\right) \\ &= 3\sin(x)\left(\cancel{1} + \cos(2x) + \cos(2x) - \cancel{1}\right) \\ &= 6\cos(2x)\sin(x). \end{aligned}$$
   Etude du signe de f' sur $[0, \pi]$:
   Sur $[0, \pi]$, on a : $\sin(x) \geq 0$ et ainsi le signe de f' ne dépend que du signe de $\cos(2x)$. On a :
   $$\begin{aligned} \cos(2x) \geq 0 &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi. \end{aligned}$$
   En faisant un cercle trigonométrique (ou une disjonction de cas suivant les valeurs de l'entier k), on remarque que sur $[0, \pi]$, on obtient :
   $$\cos(2x) \geq 0 \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right].$$
   On obtient ainsi le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	2	↗	$2\sqrt{2}$	↘	$-2\sqrt{2}$	↗	-2

4.
   - La fonction f est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ donc la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ existe bien et son équation est :
     $$y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$
     On obtient ainsi : $y = -6\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
   - La tangente à la courbe est horizontale en les points d'abscisse x pour lesquels $f'(x) = 0$. On obtient donc :
     $$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \cos(2x) = 0 \text{ ou } \sin x = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \ \underline{\textbf{ou}}\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = k\pi \text{ (après résolution)} \end{aligned}$$
5. Allure du graphe de f (je ne le fais pas sur ce graphique, mais il faudrait représenter les tangentes horizontales à l'aide d'une double flèche). Sachant que $\sqrt{2} \simeq 1,4$, on a $2\sqrt{2} \simeq 2,8$, d'où le tracé suivant en tirant profit de la parité et de la périodicité de f :



Solution (exercice 2) Énoncé

1. **1.1)** ● Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $-x \in \mathbb{R}$, et de plus :

$$\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Ainsi $\boxed{\text{la fonction ch est paire sur } \mathbb{R}}$

● Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $-x \in \mathbb{R}$, et de plus :

$$\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh} x.$$

Ainsi $\boxed{\text{la fonction sh est impaire.}}$

1.2) Les fonctions ch et sh sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme de telles fonctions. De plus, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)}$ et $\boxed{\operatorname{sh}'(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x)}$.

1.3) Ayant : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty}$$

Ayant : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ (par composition de limites, ou par quotient de limites en remarquant que en remarquant que $e^{-x} = \frac{1}{e^{x}}$), on obtient :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty}$$

1.4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$. Ainsi comme l'exponentielle est toujours strictement positive, on obtient : $\boxed{\operatorname{sh}'(x) > 0}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ comme somme de deux nombres strictement positifs. De plus $\operatorname{sh}(0) = 0$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{sh}'(x)$			$+$		
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

1.5) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$. Étudions le signe de la dérivée :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x) \geq 0 &\iff e^{x} - e^{-x} \geq 0 \\ &\iff e^{x} \geq e^{-x} \\ &\iff x \geq -x \\ &\iff 2x \geq 0 \\ &\iff x \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient : $\boxed{\operatorname{ch}'(x) \geq 0 \iff x \geq 0.}$

De plus, on a $\operatorname{ch}(0) = 1$. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

1.6) La fonction sh est dérivable en 0 car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la tangente T_0 à la courbe au point d'abscisse 0 existe bien et son équation est :

$T_0 : \ y = \operatorname{sh}'(0)x + \operatorname{sh}(0)$

$T_0 : \ y = \operatorname{ch}(0)x + \operatorname{sh}(0)$

Ainsi on a : $\boxed{T_0 : \ y = x}$ car $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $\operatorname{sh}(0) = 0$.

De même, la fonction ch est dérivable en 0 car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la tangente $\widetilde{T_0}$ à la courbe au point d'abscisse 0 existe bien et son équation est :

$\widetilde{T_0}:\ y = \mathrm{ch}'(0)x + \mathrm{ch}(0)$

$\widetilde{T_0}:\ y = \mathrm{sh}(0)x + \mathrm{ch}(0)$

Ainsi on a : $\boxed{\widetilde{T_0}:\ y = 1}$ car $\mathrm{sh}(0) = 0$ et $\mathrm{ch}(0) = 1$.

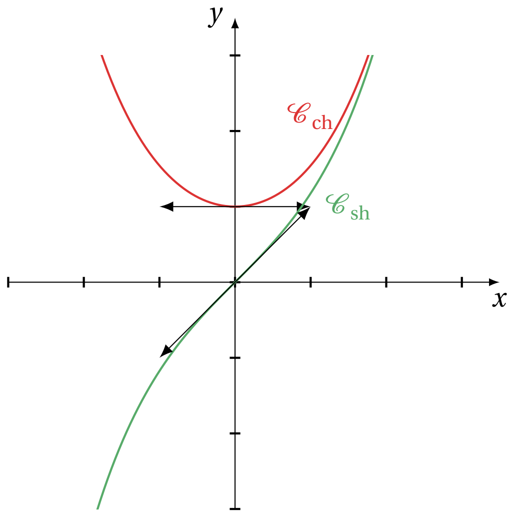
La tangente $\widetilde{T_0}$ est horizontale.

1.7) On étudie le signe de $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x = \mathrm{e}^{-x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x > 0$ car une exponentielle est toujours strictement positive. Ainsi $\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C}_{\mathrm{ch}} \text{ est toujours au-dessus de la courbe } \mathscr{C}_{\mathrm{sh}}}$.

1.8) On peut alors tracer les deux courbes. Penser à tracer les tangentes calculées.



2. 2.1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{2x} + 2 - \mathrm{e}^{-2x}\right) = 1,$$

donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.}$

On aurait aussi pu factoriser l'expression $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x$ pour obtenir le même résultat.

2.2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}\right) = \frac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \mathrm{ch}(2x),$$

donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}(2x).}$

2.3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2\,\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,x = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) \times \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left((\mathrm{e}^x)^2 - (\mathrm{e}^{-x})^2\right) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \mathrm{sh}(2x).$$

Pour démontrer une égalité donnée, il vaut mieux, en général, partir de l'expression qui semble être la plus compliquée. Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,x = \mathrm{sh}(2x).}$

2.4) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ donné, on a :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)\\
&= \frac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^{-a}}{2} \times \frac{\mathrm{e}^b + \mathrm{e}^{-b}}{2} - \frac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}}{2} \times \frac{\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^{-b}}{2}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{a+b} + \mathrm{e}^{a-b} + \mathrm{e}^{-a+b} + \mathrm{e}^{-a-b}}{4} - \frac{\mathrm{e}^{a+b} - \mathrm{e}^{a-b} - \mathrm{e}^{-a+b} + \mathrm{e}^{-a-b}}{4}\\
&= \frac{2\mathrm{e}^{a-b} + 2\mathrm{e}^{-a+b}}{4}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{a-b} + \mathrm{e}^{-(a-b)}}{2}\\
&= \mathrm{ch}(a-b).
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) - \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b) = \mathrm{ch}(a-b).}$

Solution (exercice 3) Énoncé

```python
def croissant(L):
    n = len(L)
    for i in range(n-1):
        if L[i] > L[i+1]:
            return False
    return True
```

Cette fonction vérifie si tous les éléments de la liste sont dans un ordre croissant en les comparant deux à deux. Si à un moment donné, un élément est plus grand que l'élément suivant, la fonction renvoie `False`. Sinon, elle renvoie `True` à la fin, indiquant que la liste est triée en ordre croissant.

Solution (exercice 4) Énoncé

1. Ci-après une proposition de solution.

```python
def estChaine(C):
    for i in range(len(C)-1):
        if C[i][1] != C[i+1][0]:
            return False
    return True
>>> estChaine([[1,6],[6,4],[4,3]])
```

```
True
```

On parcourt l'ensemble des couples de dominos et on compare le deuxième élément du premier avec le premier élément du deuxième. Si ces deux éléments sont différents pour un certain couple, on renvoie `False`, sinon on renvoie `True`.

2.
```
def posable(d, C):
    a_gauche = (d[0] == C[0][0]) or (d[1] == C[0][0])
    a_droite = (d[0] == C[-1][1]) or (d[1] == C[-1][1])
    return a_gauche or a_droite
>>> posable([3,4], [[1,2],[2,4]])
True
```

3. Ci-après une proposition de solution.
```
def effectifs(C):
    L = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
    for i in range(len(C)):
        chiffre_1 = C[i][0]
        chiffre_2 = C[i][1]
        L[chiffre_1] += 1
        L[chiffre_2] += 1
    return L
>>> effectifs([[0,2],[2,3],[2,5],[4,5]])
[1, 0, 3, 1, 1, 2, 0]
```