Devoir maison 4
Pour le jeudi 23 novembre

Consignes

- Les devoirs maison sont facultatifs. Pour autant, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.**

Exercice 1 | Deux calculs de sommes. Solution Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. Calculer la somme suivante : $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \left(3 \times 2^{4k+1} - 2k^2 - 3\right)$.
2. Notons $\mathrm{R}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}$.
   - **2.1)** Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer (à l'aide de factorielles) que :
   $$\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}.$$
   - **2.2)** En déduire que : $\mathrm{R}_n = \frac{2\left(2^n-1\right)}{n+1}$

Exercice 2 | Manipulation de sommes. Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} 2^k$.

1. **1.1)** Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant q$. Justifier : $\sum_{k=p}^{q} 2^k = 2^{q+1} - 2^p$.
   - **1.2)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n2^{n+1} + 1$.
2. **2.1)** Montrer, en utilisant une permutation de sommes, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$u_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1)2^k.$$
   - **2.2)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.
3. **3.1)** À l'aide de la question précédente, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i} (k+1)2^k.$$
   - **3.2)** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de : $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)2^k$.
   - **3.3)** Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} k^2 2^k$.

Exercice 3 | Nombres complexes. Solution Soit $\omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/5}$.

1. Exprimer toutes les solutions de l'équation $z^5 = 1$ à l'aide de ω. Placer approximativement ces solutions sur le cercle trigonométrique.
2. Montrer que $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
3. Montrer que $\overline{\omega} = \omega^4$. Exprimer $\overline{\omega^2}$ de manière similaire.
4. Déduire des questions précédentes que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation
   $$4z^2 + 2z - 1 = 0.$$
5. Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

CORRECTION

Solution (exercice 1) Énoncé

1. On commence par remarquer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$,
$$2^{4k+1} = 2 \times (2^4)^k = 2 \times 16^k.$$
Ainsi, par linéarité de la somme,
$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} (3 \times 2^{4k+1} - 2k^2 - 3) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (6 \times 16^k - 2k^2 - 3) \\
&= 6 \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 16^k}_{\text{somme géométrique, car } 16 \neq 1} - 2 \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{\text{somme usuelle}} - 3 \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1}_{\text{somme de termes constants}} \\
&= 6 \times \frac{16^1 - 16^{n+1}}{1-16} - 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3 \times n \\
&= \frac{6}{15}(16^{n+1} - 16) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 3 \times n \\
&= \boxed{\frac{32}{5}(16^n - 1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - 3n}.
\end{aligned}$$

2. 2.1) Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Alors : $k - 1 \in [\![0;n-1]\!]$.
Donc, par définition des coefficients binomiaux, on a :
$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} &= \frac{1}{k} \times \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} \\
&= \frac{n!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
&= \boxed{\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}}
\end{aligned}$$

2.2) Ainsi :
$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{n+1}\right]$$
Par le binôme de Newton : $R_n = \dfrac{1}{n+1}\left[(1+1)^{n+1} - 1 - 1\right]$.

Finalement : $\boxed{R_n = \dfrac{2(2^n - 1)}{n+1}}$

Solution (exercice 2) Énoncé

1. 1.1) Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant q$. Puisque $2 \neq 1$:
$$\sum_{k=p}^{q} 2^k = 2^p \left(\frac{1 - 2^{q-p+1}}{1-2}\right) = 2^p\left(2^{q-p+1} - 1\right) = \boxed{2^{q+1} - 2^p}$$
On a utilisé la formule :
$$\sum \text{suite géométrique} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb termes}}}{1 - \text{raison}}$$

1.2) Soit $n \in \mathbb{N}$. De ce qui précède, on déduit que, pour tout $j \in [\![0;n]\!]$: $\displaystyle\sum_{k=j}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2^j$. Alors :
$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} 2^k \\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n} 2^k\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n}(2^{n+1} - 2^j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} 2^{n+1} - \sum_{j=0}^{n} 2^j \\
&= (n+1)2^{n+1} - \left(2^{n+1} - 1\right) \\
&= \boxed{n2^{n+1} + 1}
\end{aligned}$$

2. 2.1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$u_n = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} 2^k = \sum_{0 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} 2^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} 2^k\right) = \boxed{\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k}$$

2.2) Soit $n \in \mathbb{N}$. En effectuant le changement d'indice $k' = k+1$, on obtient :
$$u_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k = \sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1}.$$
On peut écrire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1} = \sum_{k=0}^{n+1} k2^{k-1}$ (on ajoute un terme nul !)

Ainsi : $\displaystyle u_n = \sum_{k=0}^{n+1} k2^{k-1}$.

Ainsi, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{k=0}^{n} k2^{k-1} = u_{n-1} \overset{1.1)}{=} \boxed{(n-1)2^n + 1}$$
Cette égalité est encore vraie pour $n = 0$: elle l'est donc pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. **3.1)** Par la question **2.1)**,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}(k+1)2^k &= \sum_{i=0}^{n} u_i\\ &= \sum_{i=0}^{n}\left(i2^{i+1}+1\right) &&\textit{D'après la question 1.2}\\ &= \sum_{i=0}^{n} i2^{i+1}+\sum_{i=0}^{n}1\\ &= 4\sum_{i=0}^{n} i2^{i-1}+(n+1)\\ &= 4\left((n-1)2^n+1\right)+(n+1) &&\textit{Par la question 2.2}\\ &= \boxed{(n-1)2^{n+2}+n+5}\end{aligned}$$

3.2) Permutons les sommes du calcul précédent :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}(k+1)2^k &= \sum_{0\leqslant k\leqslant i\leqslant n}(k+1)2^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}(k+1)2^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}(n-k+1)(k+1)2^k\\ &= (n+1)\sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k-\sum_{k=0}^{n}k(k+1)2^k\end{aligned}$$

Ainsi, avec $u_n \overset{2.1)}{=} \sum_{k=0}^{n}(k+1)2^k \overset{1.2)}{=} n2^{n+1}+1$, il vient, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$(n-1)2^{n+2}+n+5=(n+1)u_n-\sum_{k=0}^{n}k(k+1)2^k,$$

soit : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k+1)2^k=(n+1)\left(n2^{n+1}+1\right)-\left((n-1)2^{n+2}+n+5\right)$

Finalement, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}k(k+1)2^k=\left(n^2-n+2\right)2^{n+1}-4}$$

3.3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k(k+1)2^k &= \sum_{k=0}^{n}k^2 2^k+\sum_{k=0}^{n}k2^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}k^2 2^k+2\sum_{k=0}^{n}k2^{k-1}\\ &\overset{2.(2)}{=} \sum_{k=0}^{n}k^2 2^k+2\left((n-1)2^n+1\right)\end{aligned}$$

On en déduit, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n}k^2 2^k \overset{3.(2)}{=} \left(n^2-n+2\right)2^{n+1}-4-2\left((n-1)2^n+1\right)=\boxed{\left(n^2-2n+3\right)2^{n+1}-6}$$

Solution (exercice 3) Énoncé

1. Soit $z\in\mathbb{C}$. Commençons par remarquer que 0 n'est pas solution de $z^5=1$. Dans la suite, on va donc supposer $z\neq 0$; on peut donc écrire $z=\rho e^{i\theta}$ où $\rho>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}z^5=1 &\iff \rho^5 e^{i5\theta}=1e^{i0}\\ &\iff \begin{cases}\rho^5=1\\ \exists k\in\mathbb{Z},\quad 5\theta=2k\pi\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\rho=1 \quad (\text{car } \rho>0)\\ \exists k\in\mathbb{Z},\ \theta=\dfrac{2k\pi}{5}\end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi les solutions de l'équation $z^5=1$ sont les :

$$e^{i\frac{2k\pi}{5}},\quad k\in[\![0,4]\!].$$

Or, $e^{i\frac{2k\pi}{5}}=\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^k=\omega^k$.

Ainsi les solutions de l'équation $z^5=1$ sont $\boxed{\omega^0(=1),\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega^4}$.

2. On reconnait une somme de termes d'une suite géométrique de raison $\omega\neq 1$. Ainsi :

$$\boxed{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=\frac{1-\omega^5}{1-\omega}=\frac{0}{1-\omega}=0}$$

En effet, ω étant une des racines $5^{\text{-ièmes}}$ de l'unité, on a $\omega^5=1$.
La représentation graphique des solutions est en fin de correction.

3. Calculons :

$$\overline{\omega}=e^{-i\frac{2\pi}{5}}=e^{i\left(-\frac{2\pi}{5}+2\pi\right)}=e^{i\frac{8\pi}{5}}=\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^4=\omega^4.$$

De même :

$$\overline{\omega^2}=e^{-i\frac{4\pi}{5}}=e^{i\left(-\frac{4\pi}{5}+2\pi\right)}=e^{i\frac{6\pi}{5}}=\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^3=\omega^3.$$

4. D'après la question précédente, l'égalité $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$ se ré-écrit $1+\omega+\omega^2+\overline{\omega^2}+\overline{\omega}=0$, c.à.d. :

$$1+2\operatorname{Re}(\omega)+2\operatorname{Re}\left(\omega^2\right)=0.$$

Or $\omega=e^{2i\pi/5}$ et $\omega^2=e^{i4\pi/5}$, donc l'égalité ci-dessus se ré-écrit :

$$1+2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)=0.$$

On souhaite trouver une équation portant uniquement sur $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$. Pour cela, remarquons que

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(2\times\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1.$$

En réinjectant cela dans l'équation donné plus haut :

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\left(2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1\right) = 0.$$

D'où en simplifiant,

$$\boxed{4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0}$$

5. • D'après la question précédente, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. Une étude rapide de cette équation montre que ses solutions sont $\frac{-2-\sqrt{20}}{8} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\frac{-2+\sqrt{20}}{8} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Or $\frac{2\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$. Puisque seule l'une des deux solutions ci-dessus est positive, on en déduit :

$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$$

• Cherchons $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. On a :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(2\times\frac{\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1$$

d'où l'on tire :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+1}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$$

puis $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$. À nouveau, $\frac{\pi}{5} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$. On conclut :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}}$$