

Devoir sur table # 3

02/12/2023 – Durée : 4h00

Consignes. Le sujet est constitué de **deux pages**. Les trois exercices et le problème sont indépendants.

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

Il est demandé de soigneusement numéroté les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les **encadrant**, en les **surlignant** ou en les **soulignant**. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction. L'usage de la calculatrice est strictement **interdit**.

Exercice 1 | Somme des cubes. [Solution](#)

Le but des questions 1 et 2 de cet exercice est de démontrer, de deux manières différentes, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

⊗ Attention

Les questions 1 et 2 sont totalement indépendantes et il n'y est jamais question d'utiliser cette formule, mais bien de retrouver cette formule par deux « chemins » différents.

- Méthode 1.** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- Méthode 2.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à calculer la somme $\sum_{k=0}^n k^3$ notamment à

l'aide des sommes $\sum_{k=0}^n k$ et $\sum_{k=0}^n k^2$.

- Simplifier (sans démonstration) les sommes $S_1 = \sum_{k=0}^n k$ et $S_2 = \sum_{k=0}^n k^2$.
- Calculer, à l'aide d'une somme télescopique, la somme $\sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4)$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Développer et réduire : $(k+1)^4 - k^4$.
- En déduire que : $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 2 | Nombres complexes. [Solution](#)

On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_0 = 1 + i$, $z_1 = (1 + i)j$ et $z_2 = (1 + i)j^2$.

- Donner l'écriture exponentielle de z_0 , z_1 et z_2 .
- Donner l'écriture algébrique de j puis celle de z_1 .
- En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.
- On pose $w = -2 + 2i$. Ecrire w sous forme exponentielle.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 = w$. On recherchera les solutions sous forme exponentielle puis on reconnaîtra z_0 , z_1 et z_2 .
- En déduire les solutions de l'équation (E') : $z^3 = \bar{w}$ (écrire les solutions sous forme exponentielle).

Exercice 3 | Autour de la fonction cotan. [Solution](#)

On définit la fonction cotan (appelée cotangente), lorsque c'est possible par :

$$\cotan(x) = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

- Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la fonction cotan.
- Montrer que cotan est impaire et π -périodique.

- On note $f \begin{cases}]0, \pi[& \xrightarrow{\quad} \mathbb{R} \\ x & \xrightarrow{\quad} \cotan x, \end{cases}$ c'est-à-dire : $f = \cotan|_{]0, \pi[}$.

- Justifier que f est dérivable sur $]0, \pi[$ avec :

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

- Dresser le tableau des variations de f sur $]0, \pi[$ en précisant les limites aux bornes du domaine.
- Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f sur $]0, \pi[$. Placer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
- Vérifier que : $\forall x \in]0, \pi[, \quad f'(x) = -1 - f(x)^2$.
- Montrer que f est une bijection de $]0, \pi[$ sur un intervalle à préciser, puis donner le tableau des variations de f^{-1} . Préciser $f^{-1}(0)$.
- Tracer la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ représentant la fonction f^{-1} sur le même graphique que $\mathcal{C}_f$.
- Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f^{-1})'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

- Pour $x \in]0, \pi[$, montrer que $\cotan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. En déduire que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan(y).$$

- Retrouver alors le résultat de la question 3.7.

Problème 1 | Formule d'inversion de PASCAL Solution

Dans ce problème, les parties I et II sont indépendantes. La partie III dépend des résultats obtenus dans les parties précédentes.

Soit (a_n) une suite quelconque de nombres réels, on pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \quad (\star)$$

PARTIE I — DEUX EXEMPLES

- Calculer b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite (a_n) est constante égale à 1, c'est-à-dire lorsque $a_k = 1$ pour tout entier naturel k .
- On suppose dans cette question que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k$.

2.1) Démontrer la *formule d'absorption*, c'est-à-dire montrer que, pour tout couple d'entiers naturels (n, k) tel que $1 \leq k \leq n$,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

2.2) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = n2^{n-1}$.

PARTIE II — FORMULE D'INVERSION DE PASCAL. Soient (a_n) et (b_n) deux suites quelconques vérifiant la relation $(\star)$. Le but de cette partie est d'exprimer la suite (a_n) en fonction de la suite (b_n) .

- Montrer que pour tout triplet d'entiers naturels (p, k, n) tels que $p \leq k \leq n$, on a :

$$\binom{n+1}{k} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p} \binom{n+1-p}{k-p}.$$

4. 4.1) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $\sum_{i=0}^N \binom{N}{i} (-1)^i$.

4.2) Montrer que pour tout couple d'entiers naturels (p, n) tels que $p \leq n$, on a :

$$\sum_{i=0}^{n-p} (-1)^i \binom{n+1-p}{i} = (-1)^{n-p}.$$

Indication : On pourra utiliser la question précédente en commençant par remplacer N par $n - p + 1$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier la relation : $a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} a_k$.

6. Le but de cette question est de démontrer par récurrence forte sur n que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.$$

Cette formule est appelée la formule d'inversion de PASCAL.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition

$$\mathcal{P}(n): \quad a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$$

On rappelle le principe de récurrence forte : afin de montrer une propriété $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \geq 0$, on montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Puis, pour $n \in \mathbb{N}$, que si $\mathcal{P}(0), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.

6.1) [Initialisation] Montrer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

6.2) [Hérédité] Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose les propositions $\mathcal{P}(k)$ vraies pour tout

$k \in [0, n]$. Autrement dit, on suppose que $a_k = \sum_{p=0}^k (-1)^{k-p} \binom{k}{p} b_p$ pour tout $k \in [0, n]$.

i) Montrer que : $a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \binom{n+1}{k} (-1)^{k-p} \binom{k}{p} b_p$.

ii) En utilisant une interversion des deux sommes doubles, montrer que :

$$a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{p=0}^n \sum_{k=p}^n (-1)^{k-p} \binom{n+1}{k} \binom{k}{p} b_p.$$

iii) Utiliser la question 3. pour obtenir :

$$a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p} b_p \sum_{k=p}^n (-1)^{k-p} \binom{n+1-p}{k-p}$$

iv) Après changement d'indice $i = k - p$ dans la somme intérieure, établir que :

$$a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n+1}{p} b_p.$$

v) En déduire que : $a_{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} (-1)^{n+1-p} \binom{n+1}{p} b_p$. Conclure.

PARTIE III — UNE APPLICATION (Cette partie peut être abordée en admettant la formule d'inversion de PASCAL, même si la précédente n'a pas été achevée.)

- En utilisant les résultats des parties précédentes, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k 2^k (-1)^{n-k} = 2n.$$

Fin du sujet

Correction

Devoir surveillé n° 3

02/12/2023 – Durée : 4h00

Solution (exercice 1) Énoncé

1. Voir le cours!

2. 2.1) D'après le cours, on a : $S_1 = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\text{et } S_2 = \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.2) Il s'agit d'une somme télescopique, on a donc :

$$\sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4) = (n+1)^4 - 0^4 = (n+1)^4.$$

2.3) En appliquant (par exemple) la formule du binôme de NEWTON et le triangle de PASCAL,

$$(k+1)^4 - k^4 = \cancel{k^4} + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - \cancel{k^4} = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

2.4) Notons S_3 la somme à calculer. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n ((k+1)^4 - k^4) &= \sum_{k=0}^n (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) \\ &= 4S_3 + 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= (n+1)^4 \quad \text{d'après les questions précédentes.} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$4S_3 + 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)^4.$$

Il reste à isoler S_3 :

$$\begin{aligned} 4S_3 &= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \\ \Leftrightarrow 4S_3 &= (n+1)((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1) \\ \Leftrightarrow 4S_3 &= (n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1) \\ \Leftrightarrow 4S_3 &= (n+1)(n^3 + n^2) \\ \Leftrightarrow 4S_3 &= (n+1)n^2(n+1) \\ \Leftrightarrow 4S_3 &= n^2(n+1)^2. \end{aligned}$$

On déduit alors que : $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$

Solution (exercice 2) Énoncé

1. On a : $|z_0| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$

$$\text{Ainsi : } z_0 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}.$$

En profitant des formes exponentielles à notre disposition :

$$z_1 = (1+i)j = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}}$$

$$z_2 = (1+i)j^2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3})} = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}}}$$

2. On a : $j = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}}.$ Aussi,

$$\begin{aligned} z_1 &= (1+i)j \\ &= (1+i) \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \boxed{-\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}} \end{aligned}$$

3. D'après la question 1, on a :

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}} = \sqrt{2} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \sqrt{2} \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right).$$

Or, on a obtenu que $z_1 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ dans la question précédente.

$$\text{Ainsi : } \sqrt{2} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \sqrt{2} \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{2} \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}, \text{ soit : } \begin{cases} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

4. On a : $|w| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$

$$\text{Puis : } w = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \boxed{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}.$$

5. 0 n'est pas solution de (E). Posons alors $z = \rho e^{i\theta}$, où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$(E) \iff z^3 = w$$

$$\iff \rho^3 e^{i3\theta} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\iff \begin{cases} \rho^3 = 2\sqrt{2} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, 3\theta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

On trouve les trois solutions en prenant $k = 0, k = 1$ puis $k = 2$.

On retrouve alors les formes exponentielles de z_0, z_1 et z_2 . Ainsi :

$$\mathcal{S} = \{z_0, z_1, z_2\}$$

6. On a :

$$z \text{ solution de (E')} \iff z^3 = \bar{w}$$

$$\iff \bar{z}^3 = \overline{\bar{w}}$$

$$\iff \bar{z}^3 = w$$

$$\iff \bar{z} \text{ solution de (E)}$$

$$\iff \bar{z} = z_0 \text{ ou } \bar{z} = z_1 \text{ ou } \bar{z} = z_2$$

$$\iff z = \bar{z}_0 \text{ ou } z = \bar{z}_1 \text{ ou } z = \bar{z}_2$$

$$\iff z = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z = \sqrt{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}} \text{ ou } z = \sqrt{2}e^{-i\frac{19\pi}{12}}.$$

D'où :

$$\mathcal{S} = \left\{ \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{11\pi}{12}}, \sqrt{2}e^{-i\frac{19\pi}{12}} \right\}$$

Solution (exercice 3) Énoncé

1. L'ensemble de définition de $\cotan$ est $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble des points où la fonction sinus s'annule, c'est-à-dire $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. La domaine $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à O, et pour tout $x \in \mathcal{D}$, $x + \pi \in \mathcal{D}$.

Soit $x \in \mathcal{D}$, alors :

$$\cotan(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cotan x.$$

Et,

$$\cotan(\pi + x) = \frac{\cos(\pi + x)}{\sin(\pi + x)} = \frac{-\cos x}{-\sin x} = \cotan(x).$$

Donc : $\cotan$ est impaire et π -périodique.

3. On note $f \Big|_{\substack{]0, \pi[\\ x \mapsto \cotan x}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, c'est-à-dire : $f = \cotan|_{]0, \pi[}$.

3.1) La fonction f est dérivable sur $]0, \pi[$, comme quotient de telles fonc-

tions à dénominateur non nul sur $]0, \pi[$. Pour tout $x \in]0, \pi[$, on a :

$$f'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

3.2) La fonction f est donc strictement décroissante, et :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) = 0^+, \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \cos(x) = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin(x) = 0^+, \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\infty.$$

$$\text{Ainsi : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = -\infty$$

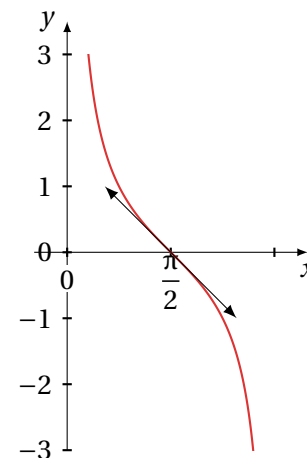
x	0	π
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

3.3) Déterminons la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{On a } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0}{1} = 0, \text{ et } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1.$$

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ a donc pour équation

$$T_{\frac{\pi}{2}} : y = -1\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \text{ à savoir : } T_{\frac{\pi}{2}} : y = -x + \frac{\pi}{2}$$



3.4) Soit $x \in]0, \pi[$, alors :

$$-1 - f(x)^2 = -1 - \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

Donc : $\forall x \in]0, \pi[, f'(x) = -1 - f(x)^2$.

3.5) Appliquons le théorème de la bijection.

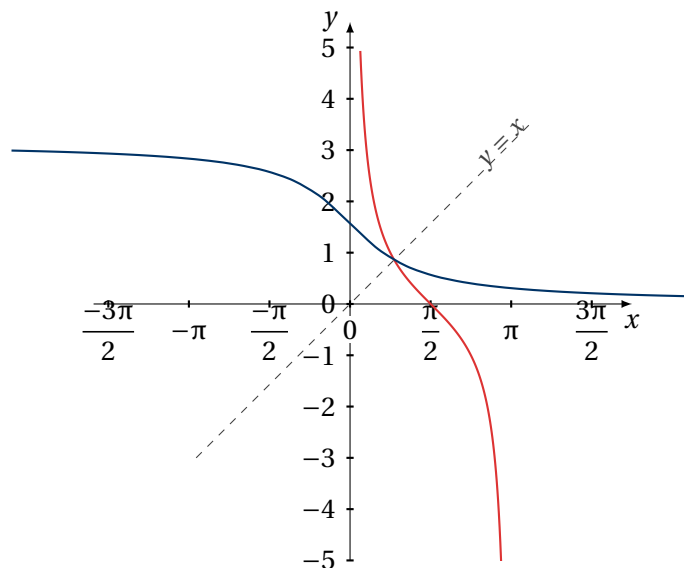
- La fonction f est continue (puisque dérivable) sur $]0, \pi[$.
- La fonction f est strictement décroissante sur $]0, \pi[$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = -\infty$.

Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]0, \pi[$ sur $f(]0, \pi[) = \mathbb{R}$. De ce même théorème, on a que f^{-1} est également strictement décroissante. On obtient alors le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	∞
$f^{-1}(x)$	π	0

Comme $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on a $f^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$.

3.6) Tracer la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ représentant la fonction f^{-1} sur le même graphique que $\mathcal{C}_f$.



3.7) La fonction f est dérivable sur $]0, \pi[$, et f' ne s'annule pas sur $]0, \pi[$ donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall y \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Mais $f'(f^{-1}(y)) = -1 - (f(f^{-1}(y)))^2$ en utilisant la question 3.4. Donc $f'(f^{-1}(y)) = -1 - y^2$. En renommant la variable, on déduit la formule

souhaitée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

3.8) Pour $x \in]0, \pi[$, on a :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cotan(x).$$

On peut donc à présent tenter de résoudre l'équation

$$y = \cotan(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

en $x \in]0, \pi[$, et ce pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in]0, \pi[$. On a :

$$y = f(x) \iff y = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\iff \arctan(y) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{car } \frac{\pi}{2} - x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \text{si } x \in]0, \pi[\end{array} \right\}$$

$$\iff \arctan(y) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$\iff x = \frac{\pi}{2} - \arctan(y).$$

On a donc établi que $f^{-1}(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

3.9) Puisque $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, on retrouve que f^{-1} l'est aussi, et

$$\text{que : } (f^{-1})'(y) = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Solution (problème 1) Énoncé

PARTIE I – DEUX EXEMPLES

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n,$$

d'après la formule du binôme de NEWTON.

2. 2.1) Sachant que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} k \binom{n}{k} &= k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \cancel{k} \frac{n!}{\cancel{k} \cdot (k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}. \end{aligned}$$

2.2) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \\
 &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} && \text{car } a_k = k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \\
 &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} && \text{car } k \binom{n}{k} = 0 \text{ si } k = 0 \\
 &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} && \text{car } k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \text{ si } 1 \leq k \leq n \\
 &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \\
 &= n \sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k'} && \text{Changement d'indice } k' = k-1 \\
 &= n 2^{n-1} && \text{D'après le binôme de NEWTON}
 \end{aligned}$$

PARTIE II — FORMULE D'INVERSION DE PASCAL

3. Soit $(p, k, n) \in \mathbb{N}^3$ avec $0 \leq p \leq k \leq n$. On a, d'une part :

$$\begin{aligned}
 \binom{n+1}{k} \binom{k}{p} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \times \frac{k!}{p!(k-p)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!p!(k-p)!}.
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
 \binom{n+1}{p} \binom{n+1-p}{k-p} &= \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} \times \frac{(n+1-p)!}{(k-p)!(n+1-k)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!p!(k-p)!}.
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient bien :

$$\forall (p, k, n) \in \mathbb{N}^3, 0 \leq p \leq k \leq n, \quad \binom{n+1}{k} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p} \binom{n+1-p}{k-p}.$$

4. 4.1) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} (-1)^i &= \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} (-1)^i 1^{N-i} \\
 &= (-1+1)^N 0^N = \boxed{0}, && \text{D'après la formule du binôme}
 \end{aligned}$$

car $N \in \mathbb{N}^*$.

4.2) Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leq p \leq n$. On a d'après la question précédente,

sachant que $n+1-p \geq p+1-p=1>0$:

$$\sum_{i=0}^{n+1-p} (-1)^i \binom{n+1-p}{i} = 0.$$

Ainsi : $\sum_{i=0}^{n-p} (-1)^i \binom{n+1-p}{i} + (-1)^{n+1-p} = 0$, d'où :

$$\sum_{i=0}^{n-p} (-1)^i \binom{n+1-p}{i} = -(-1)^{n+1-p} = (-1)^{n+2-p} = (-1)^{n-p}.$$

En effet, les entiers $n+2-p$ et $n-p$ ont même parité.

5. On a :

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_k = \binom{n+1}{k} a_{n+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} a_k = a_{n+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} a_k.$$

Donc :

$$a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} a_k$$

6. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$.

6.1) Pour $n=0$, on sait que $b_0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a_0 = a_0$ d'après la relation définissant b_n en fonction de a_n .

Remarquons alors que : $\sum_{k=0}^0 (-1)^{0-k} \binom{0}{k} b_k = (-1)^{0-0} \binom{0}{0} b_0 = b_0$, avec $b_0 = a_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

6.2) **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour tout k compris entre 0 et n .

i) On a $a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} a_k$, donc par hypothèse de récurrence sur les a_k et linéarité de la somme, on déduit alors :

$$a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \binom{n+1}{k} (-1)^{k-p} \binom{k}{p} b_p.$$

ii) Intervertissons à présent les deux sommes :

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= b_{n+1} - \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \binom{n+1}{k} (-1)^{k-p} \binom{k}{p} b_p \\
 &= b_{n+1} - \sum_{p=0}^n \sum_{k=p}^n \binom{n+1}{k} (-1)^{k-p} \binom{k}{p} b_p && \text{Interversion des sommes doubles} \\
 &= b_{n+1} - \sum_{p=0}^n \sum_{k=p}^n (-1)^{k-p} \binom{n+1}{k} \binom{k}{p} b_p.
 \end{aligned}$$

iii) On utilise la question 3 pour obtenir :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= b_{n+1} - \sum_{p=0}^n \sum_{k=p}^n (-1)^{k-p} \binom{n+1}{k} \binom{k}{p} b_p \\ &= b_{n+1} - \sum_{p=0}^n \sum_{k=p}^n (-1)^{k-p} \binom{n+1}{p} \binom{n+1-p}{k-p} b_p. \end{aligned}$$

Puis par linéarité de la somme :

$$a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p} b_p \sum_{k=p}^n (-1)^{k-p} \binom{n+1-p}{k-p}.$$

iv) Commençons par effectuer le changement d'indice préconisé.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= b_{n+1} - \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p} b_p \sum_{i=0}^{n-p} (-1)^i \binom{n+1-p}{i} b_p \\ &= b_{n+1} - \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p} b_p (-1)^{n-p}. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{D'après la} \\ \text{question 4.2} \end{array} \right\}$$

On a bien établi :
$$a_{n+1} = b_{n+1} - \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n+1}{p} b_p.$$

v) On peut enfin conclure :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= b_{n+1} - \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n+1}{p} b_p \\ &= b_{n+1} + \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p} (-1)^{n+1-p} b_p \\ &= \sum_{p=0}^{n+1} (-1)^{n+1-p} \binom{n+1}{p} b_p. \end{aligned}$$

C'est exactement la formule au rang $n+1$, la propriété d'inversion est établie.

PARTIE III — UNE APPLICATION

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la 2ème question, on a $\underbrace{n 2^{n-1}}_{=b_n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{k}_{=a_k}.$

En appliquant la formule d'inversion de PASCAL, on obtient :

$$\underbrace{n}_{=a_n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \underbrace{k 2^{k-1}}_{=b_k},$$

ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k 2^k (-1)^{n-k} = 2n.$$

en multipliant par deux des deux côtés de l'égalité.