Chapitre # (AN) 3 — Équations différentielles

Résumé & Plan

Nous allons voir dans une chapitre un outil clef qui va nous permettre de modéliser divers phénomènes : la notion d'équations différentielles. Ce type d'objet apparait naturellement dans de nombres domaines : en électricité, en mécanique, en biologie (dynamiques de population) *etc.*

Parmi toutes les disciplines mathématiques, la théorie des équations différentielles est la plus importante. Elle fournit l'explication de toutes les manifestations élémentaires de la nature où le temps est impliqué.

— **Sophus Lie**

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une **fonction** f et qui fait intervenir f et ses dérivées successives (d'où le terme *différentielle*). Les équations différentielles représentent un objet d'étude de toute première importance car elles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de processus d'évolution physiques et biologiques.

Dans tout le chapitre, le sigle EDL désignera l'expression *équation(s) différentielle(s) linéaire(s)*.

Conformément au programme, nous étudierons mathématiquement uniquement les équations différentielles **linéaires**. En Informatique, nous nous intéresserons à la résolution numérique d'équations différentielles plus générales.

1. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 1

Cadre

Dans toute cette section,
- I **désignera un intervalle réel, qui sera appelé le *domaine de définition de l'équation différentielle.***
- a **et** b **désignent deux fonctions continues sur** I**.**

1.1. Généralités

Définition 1 | Equations différentielles linéaires (EDL) d'ordre 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Une **EDL d'ordre** 1 sous forme résolue est une équation différentielle de la forme :

  où l'inconnue est la fonction y et où $a, b : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ désignent deux fonctions **continues** sur I.

- b est appelé le **second membre** de l'équation.
  Lorsque b est la fonction nulle, l'EDL $\boxed{(\mathrm{H}) : y' = a(t)y}$ est dite **homogène**.

  (H) est l'équation homogène associée à (E).

- La fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une **solution** de (E) si :

Remarque 1 (Ecriture d'une EDL d'ordre 1)

- Dans l'écriture des équations différentielles, remarquez qu'on omet souvent la variable t.
  Ainsi, on écrit $y' = a(t)y + b(t)$ plutôt que : $\forall t \in \mathbb{R}, y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$.
- De manière plus générale, une EDL d'ordre 1 à coefficients constants est une EDL de la forme $\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$ où α, β, γ désignent des fonctions continues. Mais on peut toujours se ramener à une forme résolue en divisant par $\alpha(t)$ et résoudre l'ED obtenue sur le ou les intervalles où α ne s'annule pas :

Exemple 1

- $2y' = 3ty$ est homogène d'inconnue $y : t \longmapsto y(t)$,
- $y' = \mathrm{e}^x y + x^2 \cos(x)$ d'inconnue $y : x \longmapsto y(x)$
  L'équation homogène associée est $y' = \mathrm{e}^x y$.
- Pour E, τ deux réels, $\tau \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v = \mathrm{E}$ d'inconnue $v : t \longmapsto v(t)$. La fonction $v : t \longmapsto \mathrm{E}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ est une solution de cette équation car :

Remarque 2 (Caractère $\mathscr{C}^1$ des solutions) Si y est une solution de l'équation différentielle $y' = a(t)y + b(t)$, alors y' est continue sur I (en tant que somme et produit de telles fonctions). La fonction y est donc un élément de $\mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$.

1.2. Résolution de l'équation homogène

Proposition 1 | Résolution de l'équation homogène $y' = a(t)y$

Soit $a : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{R}$ une fonction continue. Considérons l'équation différentielle homogène

$$(\mathrm{H}) : \; y' = a(t)y.$$

Les solutions de (H) sont les fonctions

Preuve

Exemple 2 (Equations homogènes d'ordre 1)

1. Résoudre $y' = ty$.

2. Résoudre $(1+t^2)y' + 4ty = 0$.

Corollaire 1 | Cas particulier où a est une fonction constante

Soit $a \in \mathbb{R}$. Considérons l'équation différentielle (H) : $y' = ay$.
Les solutions de (H) sont les fonctions f_λ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_\lambda(t) = \lambda e^{at},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve Conséquence immédiate de la proposition précédente, puisque la fonction $t \mapsto at$ est une primitive de la fonction constante $t \mapsto t$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3 (Homogènes d'ordre 1 à coefficient constant)

1. Résoudre $y' = -2y$.

2. Résoudre $2y' + 3y = 0$.

1.3. Structure de l'ensemble des solutions complète

Théorème 1 | Structure de l'ensemble des solutions d'une EDL d'ordre 1

Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I.
Considérons l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) : \; y' = a(t)y + b(t),$$

dont l'équation homogène associée est

$$(\mathrm{H}) : \; y' = a(t)y.$$

Les solutions de (E) sont les fonctions

Solution générale de l'équation COMPLÈTE = Solution générale de l'équation HOMOGÈNE + Solution PARTICULIÈRE (= une solution quelconque de l'équation complète)

Preuve *(Point clef — **Faire la différence entre l'ED avec la solution particulière et une solution générale**)*

Cas particulier des coefficients constants. Lorsque a et b sont des fonctions constantes, l'équation différentielle (E) s'écrit alors sous la forme

$$(\mathrm{E}):\ y' = ay + b,$$

où a et b sont deux réels (avec $a \neq 0$). Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

On pourra retenir (même si ce n'est pas au progamme officiel!) que :

Corollaire 2 | Solutions de $y' = ay + b$, cas des coefficients constants

Soient a et b deux nombres réels, avec $a \neq 0$. Considérons l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}):\ y' = ay + b.$$

Les solutions de (E) sont les fonctions f_λ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_\lambda(t) = \lambda \mathrm{e}^{at} - \frac{b}{a},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Attention

Cette formule ne fonctionne que si les coefficients a et b sont **constants**. Le cas général est plus délicat à traiter.

Dans le cas général, llusieurs méthodes existent pour trouver une solution particulière :

- Trouver une solution « de tête » qui convient : rapide mais difficile, et souvent impossible!
- La méthode dite de **variation de la constante**, qui permet **toujours** de trouver une solution particulière modulo la recherche d'une primitive,
- Le fait de se laisser guider par l'énoncé pour trouver une solution particulière ayant une certaine forme,
- Le principe de superposition, qui permet de découper le problème en plusieurs morceaux (cela est adapté lorsque le second membre s'écrit en tant que somme de plusieurs fonctions).

Expliquons chacune de ces méthodes.

Trouver une solution particulière « de tête ». Cela est parfois possible lorsque le second membre a une forte ressemblance avec l'équation différentielle homogène (mais cela n'arrive quasiment jamais).

Exemple 4 Résoudre l'équation différentielle $(\mathrm{E}):\ 2y' + y = 2 + x$.

Recherche d'une solution particulière : variation de la constante. Nous commençons par une méthode qui fonctionne toujours dès que le second membre est continu : la *méthode de variation de la constante*. Il s'agit de chercher une solution de la forme des solutions de l'équation homogène, où la *constante* λ est remplacée par une **fonction** dérivable $t \in \mathrm{I} \longmapsto \lambda(t)$. Nous faisons donc *varier* la constante λ au sens propre du terme.

Méthode Variation de la constante

Chercher une solution particulière $y_{\mathbf{p}}$ sous la forme $t \in \mathrm{I} \longmapsto \lambda(t)\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}$, où la fonction $\lambda : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et est à déterminer.

Justifions tout d'abord que cette méthode fonctionne toujours.

Preuve Si l'on pose $y_{\mathbf{p}}(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}$, pour tout $t \in \mathrm{I}$, où λ est une fonction dérivable sur I, alors pour tout $t \in \mathrm{I}$,

$$\begin{aligned} y^{\mathbf{p}} \text{ solution de } y' = a(t)y + b(t) &\iff \left(y_{\mathbf{p}}\right)'(t) = a(t)y_{\mathbf{p}}(t) + b(t) \\ &\iff \lambda'(t)\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)} + \cancel{\lambda(t)a(t)\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}} = \cancel{a(t)\lambda(t)\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}} + b(t) \\ &\iff \lambda'(t)\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)} = b(t) \\ &\iff \lambda'(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}b(t) \\ &\iff \lambda \text{ est une primitive de } t \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}b(t) \text{ sur I.} \end{aligned}$$

On est donc ramené à un calcul de primitive. Une fois λ déterminé (à une constante additive près !), une solution particulière est donnée sur I par $y_{\mathbf{p}}(t) = \lambda(t)\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}$.
Donc la méthode de variation de la constante fonctionne si et seulement s'il existe une primitive à la fonction $t \longmapsto b(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}$ sur I. Cette dernière existe dès que la $t \longmapsto b(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}$ est continue, ce qui est le cas.

Exemple 5

1. Résoudre $y' + y = t\mathrm{e}^{-t}$.

2. Résoudre $ty' - y + \ln(t) = 0$ sur un intervalle à préciser.

Exemple 6

1. Calculer une primitive de $t \longmapsto e^t \sin t$ sur $\mathbb{R}$.

2. Résoudre $y' + y = \sin(x)$.

SE LAISSER GUIDER. Parfois l'énoncé vous donnera aussi directement une forme sous laquelle chercher une solution particulière.

Exemple 7 Résoudre : $y' + y = e^{-\frac{t}{2}+2}$, en cherchant une solution particulière sous la forme $t \longmapsto \alpha e^{at+b}$ où α, a et b seront des réels.

PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Proposition 2 | Principe de superposition.
Le principe de superposition est adapté lorsque le second membre s'écrit en tant que somme de plusieurs fonctions « simples ».

$$\text{Supposons } (E) : y' = a(x)y + \alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x) + \ldots + \alpha_n b_n(x)$$

Si : $\begin{cases} y_1 \text{ est une solution particulière de } (\mathrm{E}_1) : y' = a(x)y + b_1(x) \\ y_2 \text{ est une solution particulière de } (\mathrm{E}_2) : y' = a(x)y + b_2(x) \\ \vdots \\ y_n \text{ est une solution particulière de } (\mathrm{E}_n) : y' = a(x)y + b_n(x) \end{cases}$

alors : $y_{\mathbf{p}} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n$ est une solution particulière de (E).

Autrement dit, lorsque le second membre de l'équation initiale est une somme, on peut décomposer l'étude et utiliser les « fonctions termes » de cette somme.

Preuve Supposons, pour simplifier, que

$$(\mathrm{E}) : y' = a(x)y + \alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x).$$

Soit y_1 une solution particulière de (E_1) : $y' = a(x)y + b_1(x)$.
Soit y_2 une solution particulière de (E_2) : $y' = a(x)y + b_2(x)$.

Remarque 3 **(Autour du principe de superposition)**
On a ainsi *linéarité* des solutions par rapport au second membre de l'EDL. On peut invoquer le pincipe de superposition pour simplifier la recherche d'une solution particulière (on recherche alors plusieurs solutions particulières à plusieurs équations différentes - en général deux- où le second membre a une forme plus simple).

Exemple 8 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' - 2y = \mathrm{e}^{3t} + 6$.

1.4. Avec condition initiale

Nous savons donc à présent résoudre complètement une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Lorsque l'on ajoute en plus une *condition initiale*, alors il existe une unique solution.

Théorème 2 | Résolution avec condition initiale
Soient $t_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une et une seule solution au « problème de CAUCHY » :

$$\begin{cases} y' &= a(t)y + b(t), \\ y(t_0) &= y_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En résumé, sans condition initiale on a une infinité de solutions. Avec une condition initiale il y a généralement unicité.

Méthode Pour résoudre une EDL d'ordre 1 avec condition initiale

- ⋆ Résoudre l'équation homogène associée.
- ⋆ Trouver une solution particulière constante de l'équation avec second membre (en utilisant par exemple la méthode de la variation de la constante et/ou le principe de superposition).
- ⋆ Additionner une solution générale de l'équation homogène associée avec cette solution particulière pour obtenir la forme générale des solutions de l'équation complète (forme qui dépend d'une constante λ).
- ⋆ Utiliser la condition initiale $y(t_0) = y_0$ pour déterminer la constante λ.

Exemple 9 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ le problème suivant : $y' - \dfrac{3}{t}y = t$ avec $y(1) = 2$.

Exemple 10 Résoudre $y' - 3y = 5, \; y(0) = 2$.

2. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU 2^{nd} ORDRE

2.1. Définitions et notations

Définition 2 | EDL à coefficients constants d'ordre 2

On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** une équation du type :

$$(\mathrm{E}): \; ay'' + by' + cy = f(x)$$

où :

- a, b et c sont des constantes réelles (avec $a \neq 0$) ;
- f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (appelée **second membre** de l'équation).
  Si f est la fonction nulle, l'EDL $\boxed{(\mathrm{H}) : ay'' + by' + cy = 0}$ est dite **homogène**.
  (H) est l'équation homogène associée à (E).
- $y : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une fonction deux fois dérivable inconnue à déterminer.

Ainsi,

⋆ y est solution de (E) si et seulement si y est deux fois dérivable et, pour tout $x \in \mathrm{I}, \; ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$.

⋆ Résoudre (E), c'est déterminer l'ensemble $\mathscr{S}_{\mathrm{E}}$ des fonctions y solutions de (E) sur I.

Exemple 11 **(Quelques exemples)**

MÉTHODE DE RÉSOLUTION. Le schéma de résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre est identique à celui utilisé pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre, à savoir :

- Résoudre l'équation homogène associée (sans second membre) et obtenir les fonctions solutions y_{H},
- Trouver une solution particulière y_0 de (E).
- L'ensemble des solutions de (E) est alors $\{y_{\mathrm{H}} + y_0\}$.

Cependant, les calculs à conduire ne sont plus les mêmes !

Formalisons cette méthode de résolution dans le théorème ci-dessous :

Théorème 3 | Structure des solutions

Une solution générale de (E) est la somme d'une solution générale de l'équation homogène associée (H) et d'une solution particulière. Ainsi si

- on connaît l'ensemble des solutions de (H), noté $\mathscr{S}_{\mathrm{H}}$
- on connaît une solution particulière de (E), notée y_p

alors l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de (E) est $\mathscr{S} = \{y_h + y_p \mid y_h \in \mathscr{S}_{\mathrm{H}}\}$

Preuve Admis : c'est une adaptation du théorème analogue concernant l'ordre 1.

2.2. Résolution de l'équation homogène

Définition 3 | Equation caractéristique

Soit l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$(\mathrm{E}): \quad ay'' + by' + cy = f(x) \quad \text{avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

L'**équation homogène** associée à (E) est l'équation :

$$(\mathrm{H}): \quad ay'' + by' + cy = 0.$$

On appelle **équation caractéristique** associée à (H) l'équation du second degré :

$$ar^2 + br + c = 0.$$

L'ensemble $\mathscr{S}_{\mathrm{H}}$ des solutions de (H) dépend du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation caractéristique :

Théorème 4 | Résolution de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique possède deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 et :
$$\mathscr{S}_{\mathrm{H}} = \left\{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \,\middle|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique possède une unique solution réelle r_0 et :
$$\mathscr{S}_{\mathrm{H}} = \left\{x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{r_0 x} \,\middle|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \alpha - i\beta$, et :
$$\mathscr{S}_{\mathrm{H}} = \left\{x \mapsto (\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x))e^{\alpha x} \,\middle|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Preuve Théorème admis (démonstration technique).

Exemple 12 Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y'' + y' - 2y = 0$

2. $y'' - 2y' + y = 0$

3. $y'' - y' + y = 0$

2.3. Recherche d'une solution particulière

Conformément au schéma de résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre, maintenant que nous savons résoudre l'équation homogène associée à (E), il nous faut pouvoir trouver une solution particulière de (E).

Le programme de 1-BCPST est limitatif :

« La forme d'une solution particulière est donnée sauf lorsque f est une fonction constante. Par exemple, lorsque f est de la forme $t \mapsto \sin(\omega t)$ ou $t \mapsto \sin(\omega t)$, l'énoncé devra indiquer de chercher une solution du type $t \mapsto \lambda \sin(\omega t) + \mu \cos(\omega t)$ ou $t \mapsto \lambda t \sin(\omega t) + \mu t \cos(\omega t)$, λ et μ étant à déterminer. »

Cas du second membre constant. On s'intéresse aux équations différentielles s'écrivant sous la forme

$$(\mathrm{E}) : \; ay'' + by' + cy = \boxed{d}$$

où a, b, c, d sont quatre réels (et $a \neq 0$).

Rappelons que l'équation caractéristique associée est

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Théorème 5 | Solution particulière pour un second membre constant

Trois cas sont à considérer

- **si 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique** (dans 99% des cas), on cherche une solution particulière sous la forme d'une constante, *i.e.* sous la forme $t \longmapsto \mathrm{C}$, où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$,
- **si 0 est racine simple de l'équation caractéristique** : on cherche une solution particulière sous la forme $t \longmapsto \mathrm{C}t$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$,
- **si 0 est racine double de l'équation caractéristique** : on cherche une solution particulière sous la forme $t \longmapsto \mathrm{C}t^2$, $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

Preuve Admis : constatons cela sur la pratique !

Exemple 13 Déterminer les solutions générales des deux équations différentielles suivantes.

1. $y'' - y' - 2y = 2.$

2. $y'' - y' = 1$.

Seconds membres plus généraux. Pour des seconds membres plus généraux, l'énoncé vous donnera toujours une forme de solution particulière.

Méthode — Solution particulière en cas de second membre variable

Lorsque la fonction second membre f de (E) est
- ⋆ une exponentielle,
- ⋆ une fonction polynomiale,
- ⋆ une fonction trigonométrique,

on recherche une solution particulière sous une forme *similaire* qui sera donnée par l'énoncé.

Exemple 14 Déterminer une solution particulière des équations différentielles ci-après.

1. $2y'' - y' - y = 3\cos(t)$. *Indication : On recherchera une solution particulière sous la forme $y_{\mathrm{p}} : t \longmapsto a\cos(t) + b\sin(t)$ avec a, b des réels à déterminer*

2. $y'' - y = t\mathrm{e}^t$. *Indication : On recherchera une solution particulière sous la forme $y_p : t \longmapsto (at^2 + b)\mathrm{e}^t$ avec a, b des réels à déterminer*

Principe de superposition. Le principe de superposition s'applique encore pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants admettant un second membre somme de plusieurs fonctions simples. Par exemple :

Proposition 3 | Principe de superposition (somme de deux fonctions)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$, $d_1, d_2 : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Si f et g sont respectivement des solutions de

$$ay'' + by' + cy = d_1(t) \quad \text{et} \quad ay'' + by' + cy = d_2(t)$$

alors $\lambda f + \mu g$ est solution de l'EDL à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t).$$

2.4. Avec conditions initiales

Admettant l'existence d'une solution particulière avec un second membre continu d, on peut démontrer l'existence et l'unicité ci-après.

Théorème 6 | Résolution avec condition initiale

Soient $t_0 \in \mathrm{I}$, $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$. Il existe une et une seule solution au « problème de Cauchy » :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy &= d(t), \\ y(t_0) &= y_0, \\ y'(t_0) &= y_1. \end{cases}$$

Preuve Admis.

Méthode Pour résoudre une EDL d'ordre 2 avec conditions initiales

* Résoudre l'équation caractéristique.
* En déduire la résolution de l'équation homogène associée.
* Trouver une solution particulière de l'équation avec second membre.
* Additionner une solution générale de l'équation homogène associée avec cette solution particulière pour obtenir la forme générale des solutions de l'équation complète (forme qui dépend de deux constantes λ et μ).
* Utiliser les conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$ pour déterminer les constantes λ et μ.

Exemple 15 Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème suivant : $y'' - 2y' - 3y = 9t^2$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. On recherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 2.

3. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

Concernant les équations différentielles :
- savoir résoudre l'homogène d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 . . ☐
- savoir effectuer une variation de la constante pour l'ordre 1 . . . . ☐
- savoir trouver une solution particulière pour l'ordre 2 lorsque le second membre est constant . . . . ☐
- savoir que lorsqu'aucune condition initiale n'est imposée, on a une infinité de solution, on conclut en donnant un ensemble de solutions . . . . ☐
- savoir que lorsqu'une condition initiale est imposée, on conclut en donnant une fonction solution . . . . ☐

3.1. Équations différentielles du premier ordre

Exercice 1 | Solution Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle indiqué.

1. $y' - 2y = x + x^2$ sur $\mathbb{R}$
2. $(1+x^2)y' + 2xy = 1$ sur $\mathbb{R}$
3. $x^2y' - y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$
4. $xy' - (1+2x)y = -x^2\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$
5. $y' - 2xy = -(2x-1)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$
6. $y' - \dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)}y = 2$ sur $]1, +\infty[$
7. $y' + \cos^3(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$
8. $y' + \dfrac{2}{x^2-1}y = x$ sur $]1, +\infty[$

Exercice 2 | Solution Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$
2. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$
3. $y' - y = x^2(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$
4. $xy' + (1-2x)y = 1$
5. $x^3y' + 4(1-x^2)y = 0$
6. $(1-x^2)y' - 2xy = 1$
7. $x^2y' - y = x^2 - x + 1$. *Indication : On pourra chercher une solution particulière affine.*

Exercice 3 | **Avec conditions initiales** Solution Résoudre les problèmes de CAUCHY suivants en précisant à chaque fois l'intervalle de résolution.

1. $y'\cos x - y\sin x = 0, \quad y(0) = 1$
2. $y' + xy = 2x, \quad y(0) = 1$

3.2. Équations différentielles du second ordre

Exercice 4 | Solution Résoudre les équations différentielles suivantes, puis déterminer l'unique solution vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. $y'' + 8y' + 15y = 5$
2. $4y'' - 4y' + y = 4$
3. $y'' - 2y' + 5y = 5$
4. $y'' - 2y' = 2$

Exercice 5 | **Avec second membres particuliers** Solution Déterminer une solution particulière des équations différentielles suivantes.

1. $y'' - y' + y = t^2 + 6$. On recherchera une solution particulière sous la forme $y_p(t) = at^2 + bt + c$ avec a, b, c trois réls.
2. $y'' + 4y = -\mathrm{e}^{2t}$. On recherchera une solution particulière sous la forme $y_p(t) = a\mathrm{e}^{2t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3. $y'' + y = \cos(t) + \sin(t)$. On recherchera une solution particulière sous la forme $y_p(t) = t(a\cos(t) + b\sin(t))$, avec a, b deux réls.
4. $y'' + y' - 2y = 2\mathrm{e}^t$. On recherchera une solution particulière sous la forme $y_p(t) = at\mathrm{e}^t$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 | **Avec conditions initiales** Solution Résoudre les problèmes de CAUCHY suivants :

1. $y'' - 4y' + 5y = 1$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
2. $y'' - 4y' + 5y = 2$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

Indication : On recherchera, pour les deux équations différentielles, une solution particulière sous forme d'une constante

3.3. Techniques particulières

Exercice 7 | ♥ **Changement de fonction inconnue** Solution Résoudre

$$x^2y'' + 3xy' + y = (x+1)^2$$

sur $\mathbb{R}^{+\star}$ en posant $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 | Changement de fonction inconnue Solution Résoudre l'équation différentielle

$$x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1$$

sur $\mathbb{R}^{+\star}$ en posant $z(x)=x^2y(x)$.

Exercice 9 | ♥ Systèmes différentiels Solution Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des systèmes différentiels suivants

1. $\begin{cases} x' &= 4x-3y \\ y' &= 2x-y \end{cases}$
2. $\begin{cases} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$ $(\theta\in\mathbb{R})$.

On déterminera une équation différentielle du second ordre dont y est solution. Pour le second système, on distinguera des cas selon la valeur de θ.

3.4. Contexte physique/chimique

Exercice 10 | Circuits électriques Solution

1. **[Circuit RC]** On place en série un condensateur de capacité C et une résistance R, alimentés par un générateur de force électromotrice V. La charge $q(t)$ du condensateur vérifie alors l'équation
$$q'(t)+\frac{1}{\mathrm{RC}}q(t)=\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{R}}.$$
Calculer l'expression explicite de q, sachant que la charge initiale est nulle, et tracer le graphe de q à l'aide de Python ( ).
2. **[Circuit LC]** On place en série un condensateur de capacité C et une bobine d'inductance L, alimentés par un générateur de force électromotrice V. La charge $q(t)$ du condensateur vérifie alors l'équation
$$q''(t)+\frac{1}{\mathrm{LC}}q(t)=\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{L}}.$$
Calculer l'expression explicite de q, sachant que la charge initiale est nulle et que $q'(0)=0$, et tracer le graphe de q à l'aide de Python ( ).

Exercice 11 | Loi de Fick Solution Une cellule est plongé dans une solution de potassium de concentration c_p. On note $c(t)$ la concentration de potassium dans la cellule à l'instant t, et on suppose que $c(0)=0$. D'après la loi de Fick, la vitesse de variation de la concentration de potassium dans la cellule est proportionnelle au gradient de concentration $c_p-c(t)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante τ homogène à un temps telle que : $c'(t)=\dfrac{c_p-c(t)}{\tau}$.
Déterminer $c(t)$ et tracer le graphe de c.

Exercice 12 | Datation au carbone 14 Solution La vitesse de désintégration du carbone 14 est proportionnelle à sa quantité présente dans le matériau considéré. Ainsi, si on note $y(t)$ le nombre d'atomes de carbone 14 présents dans un échantillon de matière organique à l'anné t, y vérifie l'équation différentielle

$$y'(t)=-ky(t),$$

où $k=1.238\times10^{-4}\mathrm{an}^{-1}$ est la constante de désintégration du carbone 14.

1. Calculer l'expression explicite de $y(t)$ en fonction du nombre N_0 d'atomes de carbone 14 à l'instant $t=0$.
2. On appelle demi-vie d'un élément radioactif le temps au bout duquel la moitié de ses atomes se sont désintégrés. Déterminer la demi-vie du carbone 14.
3. Lors de fouilles, on a découvert un fragment d'os dont la teneur en carbone 14 vaut 70% de celle d'un os actuel de même masse. Estimer l'âge de ces fragments.

Exercice 13 | Cinétique chimique d'ordre 1 Solution On considère la réaction chimique d'équation bilan : $2N_2O_5 \Longrightarrow 4NO_2+O_2$. Cette réaction a une cinétique d'ordre 1, c'est-à-dire que la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, définie par $v=-\dfrac{1}{2}\dfrac{d[N_2O_5]}{\mathrm{d}t}$ vérifie l'équation : $v=k[N_2O_5]$.

En posant $y(t)=[N_2O_5](t)$, et en notant $c_0=y(0)$, donner l'expression exacte de la vitesse de disparition du pentaoxyde de diazote, et tracer sa courbe. En déduire le temps de demi-réaction.