Chapitre # (ALG) 7 — Matrices

Être visionnaire c'est regarder le monde au-delà du temps. Mais on ne voit pas plus loin, que les choix que l'on ne peut pas comprendre.

— L'Oracle dans *The Matrix*

Résumé & Plan

Le calcul matriciel est un puissant outil pour traiter de nombreux problèmes. Par exemple, en analyse, l'étude des suites récurrentes linéaires ou de systèmes différentiels linéaires, en algèbre il permet l'étude efficace des applications linéaires ou encore des systèmes d'équations linéaires. L'objectif de ce chapitre est de développer les notions du calcul matriciel qui nous permettront de traiter les problèmes précédents plus tard dans l'année.

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

1. MATRICES & OPÉRATIONS

Cadre

Dans tout le chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n, p désignent deux entiers naturels non nuls. L'ensemble $\mathbb{K}$ est aussi appelé ensemble des scalaires.

1.1. Généralités

Définition 1 | Matrice

On appelle **matrice** de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau de nombres dans $\mathbb{K}$ comportant n lignes et p colonnes remplies de nombres

p colonnes

n lignes

En général, lorsque A est une matrice à n lignes et p colonnes, le coefficient situé à l'intersection de la i ème ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne se note $a_{i,j}$. On écrit alors

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$$

Attention

- De la même façon qu'on ne confond pas une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (une famille infinie) avec son n-ième terme u_n (pour $n \in \mathbb{N}$, un nombre réel),
- on ne confondra pas une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ (une famille) avec son coefficient (i,j) noté $a_{i,j}$ (un élément de $\mathbb{K}$).

Notation

On note $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Dans les notations précédentes, le premier indice désignera toujours le numéro de ligne, et le second le numéro de colonne.

Exemple 1 On définit :

$$A = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\8&7&6&5\\9&10&11&12\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix}-7&2\end{pmatrix} \qquad D = \left(2^i+3j\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\1\leqslant j\leqslant 2}}$$

1. Pour chacune des matrices suivantes, à quel ensemble appartiennent-elles ?

   $A \in$ $\qquad$ $B \in$ $\qquad$ $C \in$ $\qquad$ $D \in$

2. On a : $\quad a_{1,1} =$ $\qquad$ $a_{2,3} =$ $\qquad$ $a_{3,2} =$
3. Ecrire la matrice D sous forme de tableau de nombres.

Définition 2 | Matrice ligne, matrice colonne

- On appelle matrice ligne (ou vecteur ligne) un élément de $\mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.
- On appelle matrice colonne (ou vecteur colonne) un élément de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Exemple 2 Dans l'exemple précédent, B est une matrice colonne, C est une matrice ligne.

Définition 3 | Égalité matricielle

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices de-même taille. On dit que A et B sont *égales* et on note $A = B$ si :

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,\,n]\!] \times [\![1\,,\,p]\!], \quad a_{i,j} = b_{i,j}.$$

Exemple 3 Soit

$$A = \begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}\cos(0)&e^{i\pi}\\\tan(0)&2\end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\0&0\end{pmatrix}.$$

On a $A = B$ mais $A \neq C$ et $B \neq C$.

Définition 4 | Matrice carrée

Une matrice M est dire **carrée** lorsqu'elle a autant de lignes que de colonnes, c'est à dire si $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.
On dira dans ce cas que M est une **matrice carrée d'ordre** n.

Notation

On note plus simplement $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on note plus simplement $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ au lieu de $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$.

Exemple 4 La matrice $A = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3, ce que l'on note : $\quad A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

Définition 5 | Matrice nulle

- On appelle *matrice nulle de* $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice $n \times p$ ayant tous ses coefficients égaux à zéro :

$$0_{n,p} = (0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = \begin{pmatrix}0&\cdots&0\\\vdots&&\vdots\\0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

- La matrice nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est plus simplement notée 0_n.

Exemple 5 On a :

$0_{2,3} =$ $\qquad$ $0_{4,1} =$ $\qquad$ $0_3 =$

1.2. Opérations sur les matrices

Commençons par définir quelques opérations sur les matrices, en commençant par l'addition.

ADDITION ET MULTIPLICATION EXTERNE. On commence par deux opérations très intuitives sur les matrices.

Définition 6 | Somme matricielle

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On note $A+B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice *définie* par :

$$A+B = \left(a_{i,j}+b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Autrement dit, les coefficients de $A+B$ sont obtenus en sommant ceux de A avec ceux de B.

Remarque 1 On ne peut additionner entre elles que deux matrices qui ont la même taille.

Exemple 6 Calculer $A+B$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 2 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$.

On peut également multiplier une matrice par un scalaire (à savoir un élément de $\mathbb{K}$. Cette multiplication est dite externe, car un scalaire n'est a priori pas une matrice.

Définition 7 | Multiplication externe

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors la matrice λA est définie par :

$$\lambda A = \left(\lambda a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

Autrement dit, les coefficients de λA sont obtenus en multipliant ceux de A par λ.

Exemple 7

$$\text{Si}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -2\end{pmatrix},\quad \text{alors}\quad 3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 & -3 & 0 & 6\\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 6 & 3 & 3 & 6 & -6\end{pmatrix}.$$

En particulier, pour $\lambda = -1$, on arrive à la définition suivante.

Définition 8 | Matrice opposée

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle *matrice opposée de* A la matrice $-A$.

Exemple 8 Calculer $-2A+B$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ -2 & 3 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Les opérations + (addition de matrices) et · (multiplication externe) sur les matrices possède des propriétés similaires à celles des nombres réels déjà rencontrées, dont la vérification ne présente pas de difficulté.

Proposition 1 | Propriétés de la somme

Soient $(A,B,C) \in \left(\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right)^3$.

- **[Associativité]** $(A+B)+C = A+(B+C)$.
- **[Commutativité]** $A+B = B+A$.
- **[Élément neutre]** $A+0_{n,p} = 0_{n,p}+A = A$. On dit que $0_{n,p}$ est un *élément neutre* pour l'addition matricielle.
- **[Élément opposé]** $A+(-A) = 0_{n,p}$.

Proposition 2 | Propriétés de la multiplication externe

Soient $(A,B) \in \left(\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

- **[Associativité]** $(\lambda\mu)\cdot A = \lambda\cdot(\mu\cdot A)$.
- **[Élément neutre]** $1\cdot A = A$. On dit que 1 est un *élément neutre* pour la multiplication externe.
- **[Distributivité]** $(\lambda+\mu)\cdot A = \lambda\cdot A+\mu\cdot A$, $\quad\lambda\cdot(A+B) = \lambda\cdot A+\lambda\cdot B$.

MULTIPLICATION INTERNE. Passons à présent à une troisième opération : celle du produit matriciel. Nous allons chercher cette fois-ici à multiplier deux matrices entre elles. La définition ci-après peut paraître parachutée pour le moment, mais elle trouvera tout son sens plus tard dans l'année, où nous utiliserons les matrices pour traiter des problèmes d'applications linéaires. Pour l'instant l'objectif n'est donc pas de comprendre pourquoi on définit le produit matriciel ainsi, mais de savoir les calculer.

Définition 9 | Produit matriciel

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathfrak{M}_{n,\mathbf{p}}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{p},q}(\mathbb{R})$, donc telles que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Alors on appelle *matrice produit de* A *par* B, notée A × B ou plus simplement AB, la matrice de taille $n \times q$ et de coefficient général $c_{i,j}$ défini par

$$\forall (i,j) \in [\![1\,,\,p]\!] \times [\![1\,,\,q]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Remarque 2 (Sur la taille des matrices) On remarque que le nombre de colonnes de A doit obligatoirement être égal au nombre de lignes de B. On pourra retenir le schéma suivant type « relation de CHASLES » pour connaître le format de la matrice produit :

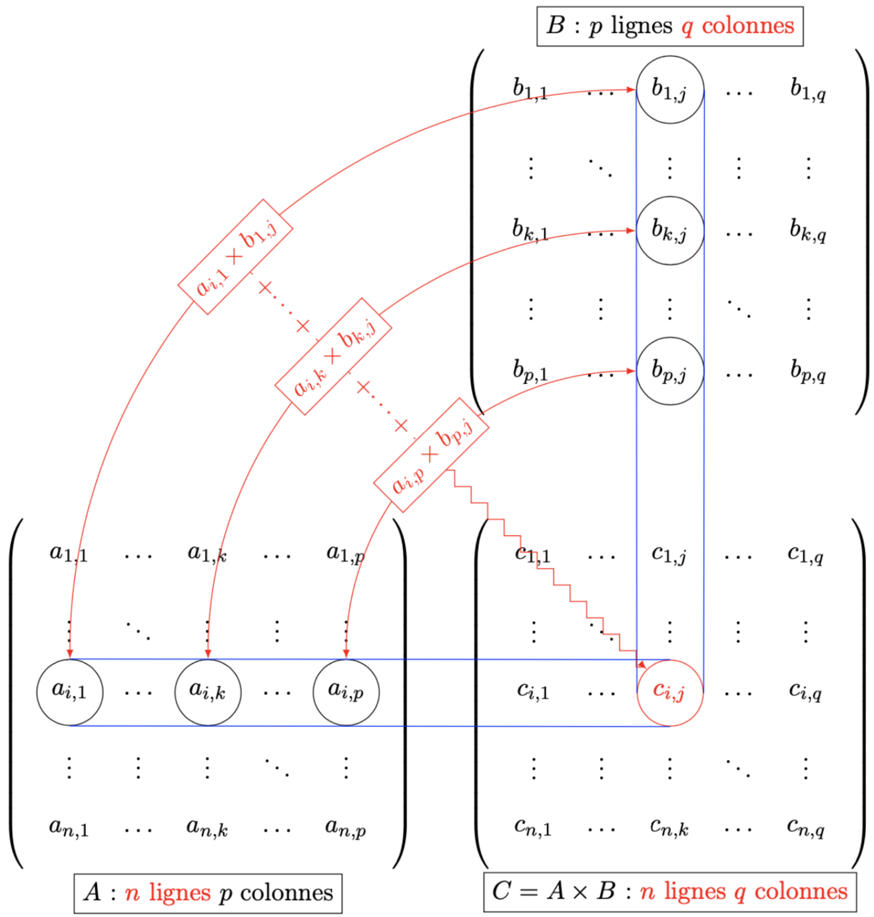
Matrice $n \times \cancel{q}$ $\times$ Matrice $\cancel{q} \times p$ $=$ Matrice $n \times p$

En particulier, le produit de deux matrices carrées de taille n est encore une matrice carrée de taille n.

Attention Existence du produit matriciel

Toujours vérifier les formats des matrices avant de calculer le produit matriciel des deux.

Le produit matriciel peut se visualiser comme ceci :



C'est cette image qu'il faut avoir en tête. On retiendra en particulier que pour calculer le coefficient (i,j) du produit, on a besoin de regarder la i-ième ligne de la première et la j-ième colonne de la deuxième.

Exemple 9 Calculer, si c'est possible, les produits AB et BA dans les cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Attention — Le produit matriciel n'est pas commutatif

Pour deux matrices carrées de même ordre, on peut aussi bien calculer AB que BA, en revanche, AB n'est en général pas égal à BA. On dit que le produit matriciel n'est pas commutatif.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

Attention — $AB = 0$ ne signifie pas forcément que $A = 0$ ou $B = 0$

Vous avez vu au collège qu'un « un produit (de nombres réels) est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul ». Ceci est **faux** pour les matrices. Etant donné deux matrices A et B, avoir $AB = 0$ (matrice nulle) ne signifie pas forcément que $A = 0$ ou $B = 0$!

Attention — Pas de résultat sur les équations-produit

Vous avez vu au collège qu'un « un produit (de nombres réels) est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul » (le résultat est encore vrai pour des complexes). Ceci est en revanche **faux** pour les matrices. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$. Calculer AB et AC :

En résumé, on ne peut simplifier par A :

$$AB = AC \not\Longrightarrow B = C.$$

De-même, pour tout vecteur colonne X :

$$AX = 0 \not\Longrightarrow X = 0.$$

Note — *En revanche, on pourra opérer à cette simplification si A est inversible, voir plus bas.*

Définition 10 | Matrices qui commutent

Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices carrées. On dit que A *et* B *commutent* si

$$AB = BA.$$

Exemple 10 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ commutent puisque :

Proposition 3 | Propriétés de la multiplication

Soient n, q, p, r trois entiers non nuls et $(A, A') \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $(B, B') \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathfrak{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- **[Distributivité à droite]** $(A + \lambda A') \times B = A \times B + \lambda A' \times B$,
- **[Distributivité à droite]** $A \times (B + \lambda B') = A \times B + \lambda A \times B'$.
- **[Associativité]** $A \times (BC) = (AB)C$.

Preuve

- Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned}
((A + \lambda A') \times B)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p} (A + \lambda A')_{i,k} B_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(A_{i,k} + \lambda A'_{j,k}\right) B_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(A_{i,k}B_{k,j} + \lambda A'_{j,k}B_{k,j}\right) \\
&\overset{\textit{linéarité de la somme}}{=} \sum_{k=1}^{p} A_{i,k}B_{k,j} + \lambda \sum_{k=1}^{p} A'_{j,k}B_{k,j} \\
&= (AB)_{i,j} + \lambda (A'B)_{i,j}.
\end{aligned}$$

- Identique à la précédente.
- Découle de l'associativité du produit de réels et de la formule du produit matriciel.

Les propriétés précédentes sont analogues à celles déjà rencontrées sur les nombres réels, avec une exception très importante : la non-commutativité du produit matriciel.

TRANSPOSITION MATRICIELLE. L'opération de transposition est une opération qui réalise une « symétrie d'axe $i = j$ » dans les coefficients de la matrice, c'est-à-dire un échange entre les lignes et les colonnes. Voyons une définition plus formelle.

Définition 11 | Transposée

Soit $A = (A_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle *transposée* de A la matrice de $\mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée $A^\top$, telle que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$(A^\top)_{i,j} = a_{j,i}.$$

Autrement dit, le coefficient $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$ de la matrice $A^\top$ est le coefficient (j, i) de A.

En particulier, le nombre de lignes de $A^\top$ est le nombre de colonnes de A, et le nombre de colonnes de $A^\top$ est le nombre de lignes de A.

Attention

Parfois certains livres ou sujets de concours notent la transposée à gauche, c'est-à-dire ${}^tA$, mais cette notation a tendance à disparaitre au profit de la notation anglo-saxonne de ce cours (et du programme).

Remarque 3 Lorsque A est carrée, on obtient $A^\top$ en faisant une symétrie des coefficients de A par rapport à sa diagonale.

Exemple 11 Déterminer la transposée de chaque matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 \\ 5 & 8 & 8 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \\ -1 & -8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Proposition 4 | Propriétés de la transposition

- **[Linéarité]** Soient $A, B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors :
$$(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top.$$
- **[Involutivité]** Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors : $(A^\top)^\top = A$.

- **[Transposée d'un produit]** Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors : $(A \times B)^\top = B^\top A^\top$.

Attention **À la formule d'un produit**

La transposition **échange** l'ordre d'un produit.

Preuve

- Se démontre en écrivant les coefficients de A et B.
- Evident.
- Se démontre en tant que conséquence de la définition du produit matriciel.

Exemple 12 **(Produits $XX^\top$ et $X^\top X$)** Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 1$ et $x_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Quel est le format de $X^\top X$? de $XX^\top$? Exprimer le coefficient général de chacune des matrices.

Matrices élémentaires. Les matrices élémentaires forment les « briques de base » de l'ensemble des matrices.

Définition 12 | Matrice élémentaire

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times \in [\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient sur la i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1.

Les matrices $E_{i,j}$ sont appelés les matrices élémentaires de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

$$E_{i,j} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & j & & \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Exemple 13 **(pour $n = 2, p = 3$)** Dans $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, les matrices élémentaires sont :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 14 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$. Exprimer A à l'aide des matrices élémentaires de $\mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

2. MATRICES CARRÉES

Dans cette section, nous discutons de résultats très spécifiques aux matrices carrées. Elles seront donc le plus souvent de taille $n \times n$ avec $n \geqslant 1$.

Définition 13 | Matrice diagonale, triangulaire

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- on appelle *coefficients diagonaux* de la matrice A les coefficients de la forme $a_{i,i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, ce sont ceux sur la diagonale de A (colorés en bleu *infra*) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

- On dit que A est une *matrice diagonale* de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ si $a_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Autrement dit, si tous les coefficients de A sont nuls sauf peut-être ceux de la diagonale, A est donc de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Notation

Si A est diagonale de coefficients diagonaux $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, on note généralement $A = \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)$.

Exemple 15 $A = \mathrm{Diag}(1,4,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 3.

Définition 14 | Matrice identité

La **matrice identité** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, notée I_n, est la matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 16 On a $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 5 | I_n est l'élément neutre pour la multiplication matricielle

Pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$A \times I_n = I_n \times A = A.$$

Constatons déjà cela sur un exemple lorsque $n = 2$.

Exemple 17 Constatons la dernière proposition sur un exemple.

Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Alors :

- $AI_2 =$

- $I_2A =$

Preuve Retournons au cas général.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $A = (a_{i,j})_{1,\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrons que $A \times I_n = A$.

La démonstration de la propriété $I_n \times A = A$ est similaire.

Remarque 4 La matrice identité I_n est le neutre pour la multiplication dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire que multiplier A par I_n à droite ou à gauche, donne toujours A.

Définition 15 | Matrice scalaire
On appelle **matrice scalaire** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ toute matrice A s'écrivant sous la forme $A = \lambda I_n$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, A est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à λ :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Exemple 18 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I_3$ est une matrice scalaire.

Définition 16 | Matrice triangulaire
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

On dit que A est une *matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure)* de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ si $a_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i > j$ (*resp.* $i < j$). Autrement dit, si tous les coefficients de A situés en-dessous (*resp.* au-dessus) de la diagonale sont nuls, A est donc de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad resp. \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 19 $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 9 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

Proposition 6 | Stabilité
- Le produit et la somme de deux matrices diagonales est une matrice diagonale.
- Le produit et la somme de deux matrices triangulaires supérieures (*resp.* inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (*resp.* inférieure).
- La transposée d'une matrice triangulaire supérieure (*resp.* inférieure) est une matrice triangulaire inférieure (*resp.* supérieure).

Preuve Admis

Définition 17 | Matrice symétrique/antisymétrique
Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que :
- A est *symétrique* si $A^\top = A$, *i.e.* si :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = a_{j,i}.$$
- A est *antisymétrique* si $A^\top = -A$, *i.e.* si :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = -a_{j,i}.$$

Exemple 20 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarque 5 Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls. En effet, si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique, alors d'après la définition, $a_{i,i} = -a_{i,i}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]^2$ Donc $a_{i,i} = 0$.

2.2. Puissances & Nilpotence

Définition 18 | Puissance p-ième
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$. On définit par récurrence la matrice A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$ comme étant :
$$A^0 = I_n, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad A^{p+1} = A \times A^p = A^p \times A.$$
De manière plus explicite, il s'agit d'un produit de p matrices, toutes égales à A :
$$A^p = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{p\text{-fois}}.$$

Exemple 21 Calculer A^2 et A^3 où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exemple 22 Calculer B^n où $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Indication :</u> On pourra commencer par calculer B^2, B^3 et conjecturer une expression générale de B^n.

Le calcul des puissances itérées d'une matrice est généralement difficile, nous verrons dans cette section quelques techniques pour y parvenir.

Définition 19 | Matrice nilpotente

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- A est dite *nilpotente* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_{n,n}$.
- Dans ce cas, l'*indice de nilpotence* est le plus petit exposant k vérifiant l'égalité $A^k = 0_{n,n}$.

L'intérêt d'une matrice nilpotente est qu'il est facile de calculer ses puissances car elles s'annulent toutes à partir d'un certain rang.

Les matrices nilpotentes ne font pas l'objet d'un travail particulier dans le programme, mais elles sont primordiales dans l'étude générale des matrices, nous en reparlerons plus tard. En outre, ce symbole puissance jouit des mêmes propriétés ci-après que celui sur les nombres réels.

Proposition 7 | Propriétés de la puissance

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$A^p \times A^q = A^{p+q}, \quad (A^p)^q = A^{pq}.$$

Attention

En revanche, en règle générale :

$$(AB)^p \neq A^p B^p,$$

sauf si les matrices A et B commutent. En effet, en règle générale,

$$(AB)^p = (AB)(AB)\cdots(AB)$$

Exemple 23 Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.

De manière générale, pour les matrices diagonales nous avons le résultat suivant.

Proposition 8 | Puissances d'une matrice diagonale

Soit $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, c'est-à-dire :

$$D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$D^k = \operatorname{Diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

Cette proposition parait anecdotique, et pourtant elle servira très régulièrement en 2ème année.

Preuve *(Point clef — **Récurrence sur** k)*
Faisons par exemple la preuve dans le cas $n = 2$.

Théorème 1 | Binôme de Newton pour les matrices

Soit $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2$ deux matrices carrées qui **commutent**, c'est-à-dire telles que : $AB = BA$. Alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Attention

L'hypothèse de commutativité est **cruciale**.
En effet, $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, sauf si A, B commutent.

Note — *Pour des réels ou complexes la formule du binôme ne faisait pas apparaitre une telle hypothèse, tout simplement car deux réels ou deux complexes commutent toujours !*

La preuve est strictement la même que pour les réelles et complexes.

Preuve *(Point clef — **Récurrence sur** p)*
Montrons par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Initialisation. On a $(A+B)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} A^k B^{0-k} = \binom{0}{0} A^0 B^0 = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$. Alors :

$$\begin{aligned}
(A+B)^{n+1} &= (A+B) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} && \textit{linéarité de la somme} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{k+1} B^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} BA^k B^{n-k} && A, B \textit{ commutent} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{k+1} B^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n+1-k} && i = k+1 \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} A^i B^{n-i+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{n} A^{n+1} B^0 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} A^i B^{n-i+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n+1-k} + \binom{n}{0} A^0 B^{n+1-0} \\
&= A^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) A^k B^{n+1-k} + B^{n+1} && \textit{formule de Pascal} \\
&= A^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} A^k B^{n+1-k} + B^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} A^k B^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat par principe de récurrence.

La plupart du temps, les matrices A, B précédentes ne seront pas données explicitement. Un premier enjeu sera donc de pouvoir décomposer une matrice donnée en une somme $A+B$ avec A, B qui commutent. Le plus souvent, afin de simplifier les calculs, nous essaierons de choisir B nilpotente.

Méthode Binôme et calculs des puissances

- Si on arrive à écrire une matrice comme somme d'une matrice D diagonale et d'une matrice nilpotente N (c'est-à-dire telle que $N^{k_0}=0$ pour un certain $k_0 \in \mathbb{N}$), qui **commutent**, on utilise la formule du binôme matricielle :
$$(D+N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k.$$
Par ailleurs, les puissances N^k sont nulles dès que $k \geqslant k_0$.
- On peut toujours écrire une matrice B sous la forme suivante :
$$\begin{aligned} B^p = (B-I_n+I_n)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (B-I_n)^k \\ = (B+I_n-I_n)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} (B+I_n)^k. \end{aligned}$$

Exemple 24 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,3}(\mathbb{R})$. Montrer que $A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & 2p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2.3. Inversion

On a vu que la multiplication matricielle nous réserve certaines surprises, en particulier la simplification est impossible de manière systématique. Mais qu'entendait-on par simplification ?

Remarque 6 (Position du problème dans $\mathbb{R}$) Soient $(b,c) \in (\mathbb{R})^2$ et $a \in \mathbb{R}^*$ que l'on suppose donc **non nul**. Supposons que :

$ab = ac$, et on souhaite prouver que $b = c$.

Rigoureusement, vous savez depuis le collège que vous pouvez multiplier cette égalité par $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$:
$$\left(a^{-1}a\right)b = \left(a^{-1}a\right)c \iff b = c.$$
Pour des matrices, on ne peut bien entendu pas écrire $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, en revanche une propriété que vérifie a^{-1}, et parfaitement prolongeable aux matrices, est :
$$a^{-1}a = aa^{-1} = 1.$$

On arrive alors directement à la notion de matrice inverse.

2.3.1. Généralités

Définition/Proposition 1 | Matrice inversible & Groupe linéaire

- Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *inversible* s'il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A \times B = B \times A = I_n$.
- Dans ce cas, B est aussi inversible, on l'appelle la *matrice inverse de* A, et on la note $B = A^{-1}$.

Notation

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles, appelé *groupe linéaire de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve *(Unicité de l'inverse)* Il nous faut prouver l'unicité de B : soient donc B, B' deux inverses de A. Alors : $B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_nB' = B'$.

Puisque l'on multiplie tantôt à droite et tantôt à gauche, la notion d'inverse n'est valable que pour des matrices carrées.

La définition mentionne qu'il faut avoir $AB = BA = I_n$, en pratique c'est un peu plus simple

Théorème 1 | Inverse à droite/gauche

- Soit $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2$, alors : $AB = I_n \iff BA = I_n$.
- Par conséquent, pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible } &\iff \exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = I_n, \quad \text{(inverse à droite)} \\ &\iff \exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ BA = I_n. \quad \text{(inverse à gauche)} \end{aligned}$$

Nous admettons ce résultat, dont la preuve dépasse très largement le programme de BCPST.

Exemple 25 Étudier l'inversibilité de la matrice nulle, de l'identité, puis des matrices scalaires.

Exemple 26 **(Inverse donné)** Soient $C = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$. Alors C est inversible d'inverse D.

Exemple 27 **(Inverse non donné)** Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont inversibles, en utilisant la définition.

Attention **Une somme de matrices inversibles n'est pas forcément inversible**

Les matrices A et B définies dans l'exemple précédent sont inversibles mais leur somme ne l'est pas, car égale à la matrice nulle qui n'est pas inversible.

Proposition 9 | Propriétés de l'inversion

- **[Inverse d'un produit]** Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles, alors $A \times B$ est inversible et :
$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}.$$
- **[Inverse d'un inverse]** Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors A^{-1} est inversible d'inverse elle-même :
$$(A^{-1})^{-1} = A.$$
- **[Transposition et inversion commutent]** Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors $A^\top$ est inversible aussi et l'on a :
$$(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top.$$

Attention **À la formule d'un produit**

L'inversion **échange** l'ordre d'un produit.

Note | *Dans la formule, on échange donc l'ordre des matrices, comme pour la transposition.*

Preuve *(Point clef — **Vérifier la définition d'une matrice inverse**)*

- 🖋
- 🖋
- 🖋

Revenons à présent à la motivation initiale : celle de pouvoir simplifier des matrices dans des égalités.

Proposition 10 | Simplification par une matrice inversible

Soit $\mathrm{A} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **inversible**. Alors :

- $\forall \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad \mathrm{AB} = \mathrm{AC} \Longrightarrow \mathrm{B} = \mathrm{C}$.
- $\forall \mathrm{X} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \mathrm{AX} = 0_{n,1} \Longrightarrow \mathrm{X} = 0_{n,1}$.

Attention à ne pas oublier d'analyser l'inversibilité. Nous avons déjà vu des contre-exemples dans le cas contraire.

Preuve

- 🖋
- 🖋

Inversibilité de matrices remarquables. Les inversibilités mentionnées ci-après pourront être utilisées sans justification supplémentaire. Nous admettons pour le moment celle concernant les matrices triangulaires.

Proposition 11 | Inversibilité de matrices diagonales & triangulaires

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

- **[Cas diagonal]** Soit $\mathrm{M} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors :
$$\mathrm{M} \text{ est inversible} \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i \neq 0.$$
Dans ce cas, nous avons :
$$\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$
- **[Cas triangulaire]** Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \star & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \star & \cdots & \star & \lambda_n \end{pmatrix}$. Alors :
$$\mathrm{M} \text{ est inversible} \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_i \neq 0.$$

En revanche, dans le cas triangulaire, il n'y a pas d'expression simple de l'inverse.

Preuve Faisons pour simplifier la preuve dans le cas $n = 2$. Elle est identique dans le cas général.

- 🖋
- Admis provisoirement. On peut déduire le résultat pour les triangulaires inférieures à l'aide des supérieures en transposant.

Exemple 28 **(Pour les matrices diagonales)**

🖋

Exemple 29 **(Inversibilité de matrices nilpotentes?)** Une matrice nilpotente est-elle inversible?

Identité moins une matrice nilpotente. L'objectif de ce paragraphe est de voir pourquoi $I_n - N$ est inversible si N est nilpotente. Nous commençons par généraliser la formule de BERNOULLI vue dans le chapitre sur les nombres réels. Cependant, seule la preuve est à connaître, l'énoncé est hors-programme.

Proposition 12 | Formule de BERNOULLI [H.P]
Soit $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2$ deux matrices carrées qui **commutent**, c'est-à-dire telles que : $AB = BA$ et $p \in \mathbb{N}$. Alors :

- $A^{p+1} - B^{p+1} = (A-B)\sum_{k=0}^{p} A^k B^{p-k}$.
- En particulier : $\forall p \in \mathbb{N}^\star, \quad I_n - A^{p+1} = (I_n - A) \times \sum_{k=0}^{p} A^k$.

Remarque 7 Dans les deux dernières égalités, les factorisations par $A-B$ et $I_n - A$ respectivement peuvent se faire à droite.

Preuve *(Point clef — **Téléscopage**)*

Exemple 30 À l'aide de la formule de BERNOULLI, montrer que pour $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$: N nilpotente $\implies I_n - N$ inversible.

Exemple 31 Considérons la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{4,4}(\mathbb{K})$. On peut décomposer $B = I_4 - aJ$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors la matrice B est inversible et on peut donner son inverse.

2.3.2. Premières techniques de calcul

On présente des techniques de calcul très proches de la définition dans cette section. La méthode principale, dite d'« échelonnement », sera vue dans le chapitre sur les systèmes linéaires.

AVEC LA DÉFINITION. Cette technique a été employée dans l'Exemple 27. On cherche l'inverse sous la forme $B = (B_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ et on injecte ces inconnues dans le problème $AB = BA = I_n$. En revanche, cette méthode est vite compliquée à mettre en oeuvre dès que les matrices sont de taille au moins 3×3.

CALCUL D'UN INVERSE À L'AIDE D'UN POLYNÔME ANNULATEUR. Cette méthode est basée sur l'existence d'une relation polynomiale en la matrice. Découvrons-là au travers d'un exemple.

Exemple 32 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

- La matrice M vérifie la relation $M^2 + 2M - 3I_3 = 0_3$.

- On déduit alors que M est inversible et on peut calculer son inverse.

  Indication : On montrera que $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

De manière générale, formalisons cela dans une méthode.

Méthode — Inverse matriciel à l'aide d'un polynôme annulateur

Supposons qu'il existe $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{K}$, et soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée vérifiant :

$$a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_p A^p = 0_n. \quad (\star)$$

On dit que $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p$ est *un polynôme annulateur de* A.

- Si $\boxed{a_0 = 0}$: alors on montre par l'absurde que A n'est **pas inversible**.
- Si $\boxed{a_0 \neq 0}$: alors on montre que A **est inversible**. En effet, $(\star)$ est équivalente à $a_1 A + \dots + a_p A^p = -a_0 I_n$, puis étant donné que a_0 est non nul :

$$A\left(-\frac{a_1}{a_0} I_n + \dots - \frac{a_p}{a_0} A^{p-1}\right) = I_n.$$

  La matrice A est alors inversible (on a montré l'existence d'un inverse à droite) d'inverse $-\frac{a_1}{a_0} I_n + \dots - \frac{a_p}{a_0} A^{p-1}$.

Attention

Il est fondamentale que a_0, c'est-à-dire le coefficient devant l'identité, soit non nul.

Exemple 33

- Une matrice nilpotente vérifie une relation du type $A^p = 0$ avec p un entier, elle n'est pas inversible sauf si elle est nulle (déjà montré dans un exemple précédent). On le retrouve avec la méthode précédente puisque le coefficient devant l'identité est nul.
- Montrer que si $A^2 - A = 0$ et $A \neq I_n$ alors A n'est pas inversible.

Cas particulier de la dimension deux. Passons à présent aux petites matrices de tailles 2×2.

Définition 20 | Déterminant d'une matrice 2×2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle *déterminant de* A, noté $\det A$, la quantité $\det A = ad - bc$.

Définition/Proposition 2 | Inversibilité d'une matrice 2×2 & Déterminant

- Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$. Alors : A est inversible $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.
- En cas d'inversibilité, on a : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Preuve

Exemple 34 Retrouver l'inversibilité des matrices de l'Exemple 27 à l'aide du déterminant, en précisant l'inverse.

Exemple 35 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Quand est-ce que la matrice $A - \lambda I_2$ est inversible ?

Exemple 36 Soit $A \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Exprimer $\det\left(A^{-1}\right)$ en fonction de $\det A$.

2.4. Matrices semblables

Définition 21 | Matrices semblables

- Soient A et B deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A et B sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que : $\quad A = PBP^{-1}$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, deux matrices sont dites *semblables sur* $\mathbb{R}$ s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Notation

On notera $A \sim B$ lorsque deux matrices sont semblables.

Proposition 13 | Puissances et matrices semblables [H.P]

Soient A et B deux matrices semblables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire telles qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $A = PBP^{-1}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \left(PBP^{-1}\right)^n = PB^nP^{-1}.$$

Ce résultat est indiqué comme [H.P] (vous ne pouvez pas l'utiliser tel quel), mais est extrêmement classique, il est donc important d'en connaître la preuve. L'idée intuitive est la suivante : il y a une simplification terme par terme.

$$\left(PBP^{-1}\right)^n = \left(PB\cancel{P^{-1}}\right) \times \left(\cancel{P}B\cancel{P^{-1}}\right) \times \cdots \times \left(\cancel{P}BP^{-1}\right) = PB^nP^{-1}.$$

Preuve *(Point clef — **Récurrence sur** n)*

Nous verrons dans de futurs chapitres une interprétation de la relation de similitude entre deux matrices. Nous nous intéressons seulement ici à une application calculatoire.

Définition 22 | Diagonalisable, Trigonalisable

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

- La matrice A est dite *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe $D \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale, et $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ inversible de sorte que : $\quad A = PDP^{-1}$. De manière équivalente :
  $$A \text{ est diagonalisable} \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ P^{-1}AP \text{ est diagonale.}$$
  Diagonaliser A c'est trouver un choix de D, P qui convient.
- Une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire s'il existe $T \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure, et $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ inversible de sorte que : $\quad A = PTP^{-1}$. De manière équivalente :
  $$A \text{ est trigonalisable} \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ P^{-1}AP \text{ est triangulaire.}$$
  Trigonaliser A c'est trouver un choix de T, P qui convient.

En première année, les matrices P et D seront toujours données, en seconde année vous aurez des méthodes pour savoir si une matrice est diagonalisable ou pas, et le cas échéant déterminer D, P. La trigonalisation ne sera quant à elle pas étudiée en BCPST de manière générale.

À quoi peut bien servir de diagonaliser une matrice? Une application importante est la possibilité de pouvoir calculer les puissances facilement (cette application en induit beaucoup d'autres, notamment en analyse sur les suites, mais nous le verrons plus tard).

Méthode — Comment trouver les puissances d'une matrice diagonalisable ?

1. Diagonaliser la matrice A : vérifier la relation $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible. En première année les matrices D, P seront toujours données.
2. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $A^n = PD^nP^{-1}$, que l'on montre généralement par récurrence, on en déduit A^n.

Appliquons cette démarche sur un exemple.

Exemple 37 Considérons $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.

2. Montrer que J_2 est diagonalisable.

3. Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \mathrm{J}_2^n = \mathrm{P}\mathrm{D}^n\mathrm{P}^{-1}$.

4. En déduire J_2^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 38 Considérons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que P est inversible et que $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. Montrer que A est diagonalisable.

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$: même preuve que précédemment.

4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Traitement matriciel d'une récurrence linéaire d'ordre 2 : exemple de Fibonacci.

Il est possible de reformuler une récurrence linéaire d'ordre deux ou plus à l'aide de matrices, mais pour simplifier nous ferons la présentation uniquement pour l'ordre deux.

Exemple 39 **(Suite de Fibonacci à l'aide de matrices)** On considère à nouveau la *suite de Fibonacci* est définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

1. Que vaut X_0 ?

2. Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

3. Montrer par récurrence que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^nX_0$.

4. Calculer ensuite A^n en diagonalisant la matrice A. *On montrera au préalable que* $A = PDP^{-1}$ *avec* $P = \begin{pmatrix} -\sqrt{5}-1 & \sqrt{5}-1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$.

5. Conclure

Remarque 8 Les calculs précédents s'étendent naturellement aux récurrences d'ordre supérieur, le vecteur colonne X_n aura simplement une taille plus grande que 2.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du chapitre** ⋆ ⋆ ⋆

3. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Savoir calculer avec les matrices (sommes, produits, transposés) ☐
2. Connaître définition et propriétés des matrices inversibles ☐
3. Savoir déterminer la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice :
   - par récurrence, en conjecturant l'expression générale ☐
   - par la formule du binôme de Newton ☐
   - par diagonalisation, lorsque celle-ci est donnée ☐

3.1. Généralités & opérations sur les matrices

Exercice 1 | Solution On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\\-1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&2&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Calculer, lorsque cela est possible, $A+B$, AB, BA, A^2, AC, $B^\top A^\top$, CA, C^2, $(C-2I_3)^3$, XB et $B^\top X$.

Exercice 2 | Solution Soit $n\in\mathbb{N}^\star$ et $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Représenter la matrice A dans les cas suivants :

1. $\forall(i,j)\in\{1,\dots n\}^2,\quad a_{ij}=\max(i,j)$,
2. $\forall(i,j)\in\{1,\dots n\}^2,\quad a_{ij}=1$ si $\quad i\leq j,\quad a_{ij}=0$ sinon,
3. $\forall(i,j)\in\{1,\dots n\}^2,\quad a_{ij}=|i-j|$.

On pourra, en cas de besoin, commencer par se placer dans le cas particulier $n=2$ ou 3

Dans chaque cas, écrire une fonction d'en-tête `creer_matrice(n)` qui retourne un tableau numpy de format $n\times n$ correspondant à la matrice. Les faire afficher pour $n=4$.

3.2. Puissances de matrice carrée

Exercice 3 | Solution Soient les deux matrices suivantes :

$$B=\begin{pmatrix}0&1&3\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

1. Calculer B^3. La matrice B est-elle inversible ?
2. Calculer les puissances n-ièmes de C.

Exercice 4 | ♥ **Puissance et application à un système de suites récurrentes** Solution On considère la matrice $N=\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$.

1. Calculer N^2. Donner une relation entre N^2, N et I_3. N est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
2. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad N^n=u_nN+v_nI.$$
3. En déduire u_n et v_n en fonction de n. Puis donner l'expression de N^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
4. **[Application]** Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de réels telles que $x_0=y_0=1$ et $z_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$\begin{cases}x_{n+1}&=2x_n-2y_n+z_n\\y_{n+1}&=2x_n-3y_n+2z_n\\z_{n+1}&=-x_n+2y_n.\end{cases}$$
Calculer x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 5 | ♥ **Puissance et relation de récurrence** Solution Soit $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que A^n est de la forme : $\quad A^n=\begin{pmatrix}a_n&b_n&b_n\\b_n&a_n&b_n\\b_n&b_n&a_n\end{pmatrix}$.
2. Déterminer a_n et b_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 6 | ♥ **Puissance et relation de récurrence** Solution On considère la matrice :

$$A=\begin{pmatrix}0&1/a&1/a^2&1/a^3\\a&0&1/a&1/a^2\\a^2&a&0&1/a\\a^3&a^2&a&0\end{pmatrix}\quad\text{avec } a\in\mathbb{R}^\star.$$

1. Calculer A^2 et montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et I_3.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

3. Montrer qu'il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n, b_n vérifiant $A^n = a_n A + b_n I_3$. Que peut-on dire de la suite $(a_n - b_n)$?
4. Soit $c_n = (-1)^n b_n$, trouver une relation de récurrence entre c_{n+1} et c_n. En déduire A^n.

Exercice 7 | ♥ Puissance et diagonalisation Solution

1. **[Généralités]** Soit A une matrice carrée diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe P une matrice inversible telle que $P^{-1}AP = D$ où D est diagonale.
   1.1) Exprimer A en fonction de D.
   1.2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n.
   1.3) Montrer que A inversible si et seulement si D est inversible et, qu'on a alors : $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.
2. **[Application]** Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   2.1) Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1}.
   2.2) Vérifier que M est diagonalisable et calculer la matrice diagonale associée.
   2.3) Étudier l'inversibilité de M.
   2.4) Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.3. Inversibilité de matrice carrée

Exercice 8 | ⚙ Solution On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA. Conclusion ?
2. Calculer A^2 et CB. Les matrices A et B sont-elles inversibles ?
3. La matrice C est-elle inversible ?

Exercice 9 | ⚙ Solution Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $M^2 = (a+d)M - (ad - bc)I_2$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et déterminer alors M^{-1}. On posera $\Delta = ad - bc$.

Exercice 10 | ⚙ **Matrices de rotation** Solution Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le produit de deux éléments de $\mathscr{R}$ est un élément de $\mathscr{R}$.
2. Montrer que deux matrices de $\mathscr{R}$ commutent.
3. Montrer que $I_2 \in \mathscr{R}$.
4. Montrer que tout élément de $\mathscr{R}$ est inversible et que son inverse est encore dans $\mathscr{R}$.

Pour tout $X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, le vecteur $M_\theta X$ correspond à la rotation (à montrer avec un peu de trigonométrie) du vecteur X d'angle θ. Ceci permet d'interpréter géométriquement les résultats précédents.

Exercice 11 | ♥ Solution Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et l'écrire en fonction de A et de I_3.
2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 12 | ♥ Solution Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A - I_3)^2$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 13 | ⚙ Solution Pour chacune des matrices suivantes, étudier si elle est inversible ou pas et lorsqu'elle est inversible, donner son inverse.

1. $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $M^4 - 4M^2 + M - 5I_3 = 0_3$.
2. $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^5 - A = 0_3$ et telle que $A^4 \neq I_3$.

Exercice 14 | ♥ Solution Soient $a, \quad b, \quad c, \quad d$ des réels non tous nuls. On considère la matrice : $M = \begin{pmatrix} a & -d & c & -b \\ d & a & -b & -c \\ -c & b & a & -d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit matriciel $M^\top \times M$.
2. La matrice M est-elle inversible ? Si oui, calculer M^{-1}.

3.4. Divers

Exercice 15 | ♥ Commutant Solution On cherche à déterminer le commutant de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient :

$$\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad AM = MA.$$

Cela revient à chercher les matrices A qui commutent avec toutes les autres matrices. Soit A une telle matrice.

1. Soit D une matrice diagonale d'ordre n d'éléments diagonaux distincts deux à deux. Expliciter AD et DA et en déduire que A est diagonale.
2. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter MA et AM et en déduire que tous les coefficients de A sont égaux.
3. Décrire le commutant de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16 | **Application matricielle** Solution Soit f l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathfrak{M}_3(\mathbb{R},) \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

On rappelle que $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de format 3×3.

1. L'application f est-elle injective ?
2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $f(x)f(y)$ et montrer que $f(x)f(y) \in f(\mathbb{R})$.
3. En déduire :
   3.1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et
   3.2) que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donner son inverse. A-t-on $f(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$?