Devoir sur table # 4
13/01/2024 – Durée : 3h00

Consignes. *Le sujet est constitué de **deux pages**. Les six exercices sont indépendants.*

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

*Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les encadrant, en les surlignant ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction. L'usage de la calculatrice est strictement **interdit**.*

Les abus suivants entrainent la note de $\boxed{0/4}$ en rédaction :

- variables non quantifiées *(Ce n'est pas au correcteur de deviner qui est x ou qui est n !)* ,
- confusion entre égalité = et équivalence $\Longleftrightarrow$,
- écrire « la fonction $f(x)$ »,
- un excès de phrases sans sens.

Exercice 1 | Calculs d'intégrales. Solution On pose

$$\mathrm{I} = \int_0^1 x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathrm{J} = \int_0^1 x^2\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.
2. A l'aide d'une première intégration par parties, établir que $\mathrm{J} = \mathrm{e} - 2\mathrm{I}$.
3. Calculer I à l'aide d'une deuxième intégration par parties.
4. En déduire la valeur de l'intégrale J.

Exercice 2 | Équation différentielle linéaire d'ordre 1. Solution

1. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

On considère sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$\textbf{(E)} \quad (1+x^2)y' - y = (1+x^2)\mathrm{e}^{-\arctan(1/x)}$$

2. **2.1)** Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation homogène associée à **(E)**.
   2.2) Résoudre finalement **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 | Calculs d'intégrales, version 2. Solution

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle \mathrm{I} = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $u = \cos(x)$.
2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
   Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $\forall x \in [a,b], \ f(a+b-x) = f(x)$.
   Montrer que : $\displaystyle\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. *(On pourra partir de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x$ et commencer par utiliser le changement de variable $x = a+b-t$)*
3. Déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale $\displaystyle \mathrm{J} = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 | Etude d'une suite récurrente. Solution On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$.
   2.1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n + \ln(2)$.
   2.2) En déduire les expressions de v_n puis de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 | Dénombrement dans un ascenseur. Solution Soient n et p des entiers tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.

L'immeuble de la Business Chinese Park Software Tower (BCPST) est une tour de n étages, heureusement pourvue d'un ascenseur et de son liftier.

Au rez-de-chaussée, p personnes entrent dans la cabine et pressent (sur le tableau de commande des étages) le bouton de l'étage où elles veulent se rendre (ce qui allume le bouton, bien sûr). Il est possible que plusieurs personnes désirent se rendre au même étage. Lorsque l'ascenseur s'arrête à l'étage $k \in [\![1\,,\,n]\!]$, toutes les personnes ayant appuyé sur le bouton « k » descendent simultanément. L'ascenseur dessert les étages dans l'ordre croissant (il ne fait que monter).

Le rez-de-chaussée n'est pas considéré comme un étage. Les p personnes sont supposées discernables.

1. **1.1)** Combien y a t-il d'illuminations différentes possibles du tableau de commande au moment du départ si on suppose que toutes les personnes descendent au même étage ?
   1.2) Combien y a t-il d'illuminations différentes possibles du tableau de commande au moment du départ si on suppose qu'il y a exactement deux boutons allumés au départ de l'ascenseur ?

1.3) Combien y a t-il d'illuminations différentes possibles du tableau de commande au moment du départ si on suppose qu'il y a au maximum deux boutons allumés au départ de l'ascenseur ?

1.4) Montrer que dans le cas général, le nombre d'illuminations différentes du tableau de commande vaut N, où N est donné par :

$$\mathrm{N} = \sum_{k=1}^{p} \binom{n}{k}.$$

Simplifier la valeur de N lorsque $p = n$.

2. Au moment du départ, le liftier constate que, parmi les boutons des étages, p sont allumés. De combien de façons différentes les p personnes peuvent-elles alors descendre ?

3. Même question si le liftier constate au départ que $p-1$ boutons sont allumés.

Exercice 6 | Équation différentielle linéaire d'ordre 3. Solution On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions ci-après :

$$g_1 : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}, \quad g_2 : x \longmapsto \mathrm{e}^{-2x}\cos(x), \quad g_3 : x \longmapsto \mathrm{e}^{-2x}\sin(x).$$

Et on définit l'ensemble des « combinaisons linéaires de g_1, g_2, g_3 » comme étant :

$$\mathscr{E} = \left\{\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 \,\middle|\, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3\right\}.$$

Ainsi, si $f \in \mathscr{E}$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3$, au sens où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x) + \lambda_3 g_3(x).$$

On s'intéresse dans cet exercice à la résolution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 suivante :

$$y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0 \quad \textbf{(H)}$$

et on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de **(H)**.

1. **1.1)** Vérifier que g_1 est solution de **(H)**.

1.2) Vérifier que g_2 est solution de **(H)**. *On admet par la suite que g_3 est également solution de* ***(H)***

1.3) Justifier l'inclusion : $\mathscr{E} \subset \mathscr{S}$.

2. Dans cette question, on souhaite démontrer que : $\mathscr{S} \subset \mathscr{E}$. Pour cela, on considère une fonction f solution de **(H)**.

2.1) On pose $g = f'' + 4f' + 5f$. Montrer que g est solution de l'équation différentielle : **(H1)** $y' + y = 0$.

2.2) Résoudre l'équation différentielle **(H1)**.

2.3) Résoudre l'équation différentielle : **(H2)** $y'' + 4y' + 5y = 0$. *(On notera* A *et* B *les constantes intervenant dans l'ensemble des solutions, en lieu et place de* λ *et* μ.*)*

2.4) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle : **(E2)** $y'' + 4y' + 5y = \lambda \mathrm{e}^{-x}$.
Indication : On cherchera une solution particulière sous la forme $x \longmapsto \mathrm{C}\mathrm{e}^{-x}$ avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ à déterminer.

2.5) Conclure.

Correction
Devoir surveillé n° 4
13/01/2024 – Durée : 3h00

Solution (exercice 1) Énoncé

1. Par calcul direct :
$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e} - 1$$
2. Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto x^2$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, par intégration par parties :
$$\mathrm{J} = [x^2\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2\int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2\mathrm{I}$$
3. Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto x$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, par intégration par parties :
$$\mathrm{I} = [x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \overset{\text{D'après la question 1}}{=} \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1$$
4. Par les calculs précédents : $\mathrm{J} = \mathrm{e} - 2$

Solution (exercice 2) Énoncé

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme et composée de telles fonctions et :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\cancel{1+x^2}} - \frac{1}{\cancel{x^2+1}} = 0.$$
   Ainsi, f est constante sur $\mathbb{R}_+^*$: il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ de sorte que $f(x) = \mathrm{C}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Or,
$$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$
   Ainsi, $\mathrm{C} = f(1) = \frac{\pi}{2}$. D'où :
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$$
2. **2.1)** L'équation différentielle associée à **(E)** est
$$\textbf{(H)} :\ y' = \frac{1}{1+x^2}y.$$
   Les solutions de **(H)** sont les fonctions y_h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\boxed{y_h(x) = \lambda\mathrm{e}^{\arctan(x)}}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

   2.2) Cherchons une solution particulière de **(E)** sous la forme
$$y_p : x \mapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{\arctan(x)}.$$
   La fonction y_p est solution de **(E)** si et seulement si :
$$(1+x^2)y_p'(x) - y_p(x) = (1+x^2)\mathrm{e}^{-\arctan(1/x)}$$
$$\iff (1+x^2)\left(\lambda'(x)\mathrm{e}^{\arctan(x)} + \frac{\lambda(x)}{1+x^2}\mathrm{e}^{\arctan(x)}\right) - \lambda(x)\mathrm{e}^{\arctan(x)} = (1+x^2)\mathrm{e}^{-\arctan(1/x)}$$
$$\iff (1+x^2)\lambda'(x)\mathrm{e}^{\arctan(x)} + \cancel{\lambda(x)\mathrm{e}^{\arctan(x)}} - \cancel{\lambda(x)\mathrm{e}^{\arctan(x)}} = (1+x^2)\mathrm{e}^{-\arctan(1/x)}$$
$$\iff \cancel{(1+x^2)}\lambda'(x)\mathrm{e}^{\arctan(x)} = \cancel{(1+x^2)}\mathrm{e}^{-\arctan(1/x)}$$
$$\iff \lambda'(x) = \mathrm{e}^{-(\arctan(x)+\arctan(1/x))}$$
$$\overset{\text{D'après la question 1}}{\iff} \lambda'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}.$$
   Ainsi, on peut prendre $\lambda(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$ et une solution particulière y_p est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$y_p(x) = x\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\arctan(x)} = x\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}+\arctan(x)} = x\mathrm{e}^{-\arctan(1/x)}.$$
   Ain si, les solutions de **(E)** sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\boxed{y(x) = \lambda\mathrm{e}^{\arctan(x)} + x\mathrm{e}^{-\arctan(1/x)},\quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}}$$

Solution (exercice 3) Énoncé

1. Posons $u = \cos(x)$, de sorte que $\mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$. De plus,
$$\begin{cases} x = 0 \implies u = 1 \\ x = \pi \implies u = -1. \end{cases}$$
   La fonction $x \mapsto \cos(x)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, par changement de va-

riables :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx &= \int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^2} \quad \text{Changement de sens des bornes}\\ &= \int_{-1}^{1} \frac{du}{1+u^2}\\ &= [\arctan(u)]_{-1}^{1}\\ &= \arctan(1)-\arctan(-1)\\ &= \frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \boxed{\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

2. On procède par changement de variable. Posons $x = a+b-t$. Alors $dx = -dt$. Si $x = a$, alors $t = b$ et si $x = b$, alors $t = a$. La fonction $t \mapsto a+b-t$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Donc par changement de variables :

$$\begin{aligned}\int_a^b xf(x)\,dx &= \int_b^a (a+b-t)\underbrace{f(a+b-t)}_{=f(t)}(-dt) \quad \text{Inversion du sens des bornes}\\ &= \int_a^b (a+b-t)f(t)\,dt \quad \text{Linéarité, et variable muette}\\ &= (a+b)\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b xf(x)dx.\end{aligned}$$

Ainsi : $\quad 2\int_a^b xf(x)\,dx = (a+b)\int_a^b f(x)dx,\quad$ donc :

$$\boxed{\int_a^b xf(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx}$$

3. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$. La fonction f est continue sur $[0,\pi]$ comme quotient et composée de telles fonctions. De plus, pour tout $x \in [0,\pi]$,

$$f(0+\pi-x) = \frac{\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)} = \frac{\sin x}{1+(-\cos x)^2} = f(x).$$

Avec ce qui précède :

$$J = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{0+\pi}{2}\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx}_{=\frac{\pi}{2}\ \text{(Question 1)}} = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}$$

Solution (exercice 4) Énoncé

1. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: $u_n > 0$.

Initialisation. On a $u_0 = 1 > 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$, de sorte que $u_n > 0$.

Par stricte croissance de $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, il vient $\sqrt{u_n} > \sqrt{0}$ et donc $u_{n+1} > 0$.
Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$.

2. **2.1)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(2\sqrt{u_n}\right) = \ln(2)+\frac{1}{2}\ln(u_n) = \frac{1}{2}v_n+\ln(2).$$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n+\ln(2)}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique.

2.2) On commence par chercher $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell+\ln(2) \iff \ell = 2\ln(2).$$

Posons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n - 2\ln(2)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}w_{n+1} &= v_{n+1}-2\ln(2)\\ &= \frac{1}{2}v_n+\ln(2)-2\ln(2)\\ &= \frac{1}{2}v_n-\ln(2)\\ &= \frac{1}{2}(v_n-2\ln(2))\\ &= \frac{1}{2}w_n.\end{aligned}$$

La suite (w_n) est alors géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme

$$w_0 = v_0-2\ln(2) = \ln(u_0)-2\ln(2) = \ln(1)-2\ln(2) = -2\ln(2).$$

D'où : $\quad w_n = -2\ln(2)\left(\frac{1}{2}\right)^n,\quad$ puis : $\quad v_n = 2\ln(2)-2\ln(2)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$

Sachant que $v_n = \ln(u_n)$, on a : $\quad u_n = e^{v_n}$. D'où :

$$\begin{aligned}u_n &= e^{2\ln(2)-2\ln(2)\left(\frac{1}{2}\right)^n}\\ &= e^{\ln(4)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}\\ &= \left(e^{\ln(4)}\right)^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}.\end{aligned}$$

On obtient donc finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \boxed{u_n = 4^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}}.$$

Solution (exercice 5) Énoncé

1. **1.1)** $\boxed{\text{Il y en a autant que d'étages, c'est-à-dire } n}$

1.2) Il y en a autant que de parties à deux éléments dans l'ensemble $[\![1\,,\,n]\!]$,

$\boxed{\text{c'est-à-dire } \binom{n}{2}}$

1.3) Il y a soit un bouton d'allumé, soit deux. Par somme des deux résultats précédents (les cas étant disjoints),

$$\boxed{\text{Il y en a } n + \binom{n}{2}}$$

1.4) On dénombre les illuminations de la manière suivante : il y a celles qui comportent 1 bouton allumé, 2 boutons allumés, ..., jusqu'à p boutons allumés (car il y a p personnes).
On note A_k le nombre d'illuminations qui comportent exactement k boutons allumés. Choisir une telle illumination revient à choisir k éléments distincts dans $[\![1, n]\!]$ (l'ordre n'ayant pas d'importance), et donc $A_k = \binom{n}{k}$. Le nombre total d'illuminations possibles est donc

$$\boxed{A_1 + A_2 + \cdots + A_p = \sum_{k=1}^{p} A_k = \sum_{k=1}^{p} \binom{n}{k}}$$

Lorsque $p = n$, on a,

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{0} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} - 1 \\ &= (1+1)^n - 1 \\ &= \boxed{2^n - 1} \end{aligned}$$

D'après la formule du binôme de NEWTON

2. Le liftier constate que p boutons sont allumés : ces p boutons sont donc fixés. Ce qui peut varier est l'ordre dans lequel les personnes descendent. Choisir un ordre de descente revient à choisir une permutation de p éléments. Comme il y a $p!$ permutations de p éléments,

$$\boxed{\text{Les personnes peuvent alors descendre de } p! \text{ façons différentes}}$$

3. $p - 1$ boutons sont allumés si et seulement si les p personnes descendent toutes à des étages différents, sauf deux qui descendent au même étage. Effectuer une descente revient donc à

- choisir les deux personnes qui vont descendre au même étage : cela nous donne $\binom{p}{2}$ possibilités,
- <u>et</u> choisir l'étage auquel elles descendent : cela nous laisse $p - 1$ possibilités,
- <u>et</u> choisir un ordre de descente pour les $p - 2$ personnes restantes parmi les $p - 2$ étages restants : cela nous laisse $(p - 2)!$ possibilités.

D'où un total de $\binom{p}{2} \times (p-1) \times (p-2)! = \binom{p}{2} \times (p-1)!$ possibilités.

$$\boxed{\text{Les personnes peuvent alors descendre de } \binom{p}{2} \times (p-1)! \text{ possibilités}}$$

Solution (exercice 6) Énoncé

1. 1.1) La fonction $g_1 : x \longmapsto e^{-x}$ est trois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on a :

$$g_1'(x) = -e^{-x}, \quad g_1''(x) = e^{-x} \quad \text{et} \quad g_1'''(x) = -e^{-x}.$$

Ainsi, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g_1'''(x) + 5g_1''(x) + 9g_1'(x) + 5g_1(x) &= -e^{-x} + 5e^{-x} - 9e^{-x} + 5e^{-x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{g_1 \text{ est solution de } \mathbf{(H)}}$

1.2) La fonction $g_2 : x \longmapsto e^{-2x}\cos(x)$ est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de telles fonctions. Pour tout réel x, on a :

$$g_2'(x) = -2e^{-2x}\cos(x) - e^{-2x}\sin(x),$$

$$\begin{aligned} g_2''(x) &= 4e^{-2x}\cos(x) + 2e^{-2x}\sin(x) + 2e^{-2x}\sin(x) - e^{-2x}\cos(x) \\ &= 3e^{-2x}\cos(x) + 4e^{-2x}\sin(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2'''(x) &= -6e^{-2x}\cos(x) - 3e^{-2x}\sin(x) - 8e^{-2x}\sin(x) + 4e^{-2x}\cos(x) \\ &= -2e^{-2x}\cos(x) - 11e^{-2x}\sin(x). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} &g_2'''(x) + 5g_2''(x) + 9g_2'(x) + 5g_2(x) \\ &= -2e^{-2x}\cos(x) - 11e^{-2x}\sin(x) + 5\left[3e^{-2x}\cos(x) + 4e^{-2x}\sin(x)\right] \\ &+ 9\left[-2e^{-2x}\cos(x) - e^{-2x}\sin(x)\right] + 5e^{-2x}\cos(x) \\ &= e^{-2x}\cos(x)(-2 + 15 - 18 + 5) + e^{-2x}\sin(x)(-11 + 20 - 9) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{g_2 \text{ est solution de } \mathbf{(H)}}$

1.3) Puisque g_1, g_2 et g_3 sont solutions de la même équation différentielle homogène linéaire $\mathbf{(H)}$, on a :

$$\begin{cases} g_1''' + 5g_1'' + 9g_1' + 5g_1 = 0, \\ g_2''' + 5g_2'' + 9g_2' + 5g_2 = 0, \\ g_3''' + 5g_3'' + 9g_3' + 5g_3 = 0. \end{cases}$$

Soit $f \in \mathscr{E}$. Il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $f = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3$.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
&f''' + 5f'' + 9f' + 5f \\
&\quad = (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3)''' + 5(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3)'' \\
&\qquad + 9(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3)' + 5(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3) \\
&\quad = \lambda_1 g_1''' + \lambda_2 g_2''' + \lambda_3 g_3''' + 5\lambda_1 g_1'' + 5\lambda_2 g_2'' + 5\lambda_3 g_3'' \quad \textit{Par linéarité de la dérivation} \\
&\qquad + 9\lambda_1 g_1' + 9\lambda_2 g_2' + 9\lambda_3 g_3' + 5\lambda_1 g_1 + 5\lambda_2 g_2 + 5\lambda_3 g_3 \\
&\quad = \lambda_1 \Big(\underbrace{g_1''' + 5g_1'' + 9g_1' + 5g_1}_{=0}\Big) + \lambda_2 \Big(\underbrace{g_2''' + 5g_2'' + 9g_2' + 5g_2}_{=0}\Big) \\
&\qquad + \lambda_3 \Big(\underbrace{g_3''' + 5g_3'' + 9g_3' + 5g_3}_{=0}\Big) \\
&\quad = \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 0 + \lambda_3 \times 0 \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

Donc f est solution de **(H)**, ce qui s'écrit : $f \in \mathscr{S}$.
Ainsi : $\forall f \in \mathscr{E},\ f \in \mathscr{S}$. Ce qui s'écrit encore : $\boxed{\mathscr{E} \subset \mathscr{S}}$.

2. 2.1) On a : $g = f'' + 4f' + 5f$, donc : $g' = f''' + 4f'' + 5f'$. Alors :

$$\begin{aligned}
g' + g &= f''' + 4f'' + 5f' + f'' + 4f' + 5f \\
&= f''' + 5f'' + 9f' + 5f \quad \textit{car } f \textit{ est solution de } \textbf{(H)}. \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{g \text{ est solution de } \textbf{(H1)} :\ y' + y = 0}$

2.2) On a : **(H1)** : $y' = -y$.
D'après le cours, les solutions de **(H1)** sont les fonctions g_λ définies sur $\mathbb{R}$ par $g_\lambda(x) = \lambda e^{-x}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.3) L'équation caractéristique associée à **(H2)** est $r^2 + 4r + 5 = 0$. Le discriminant associé vaut $\Delta = -4$. Ayant $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux solutions complexes conjuguées qui sont, après calculs : $z_1 = -2 - i$ et $z_2 = -2 + i$.
Les solutions de **(H2)** sont donc les fonctions y_h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{y_h(x) = (A\cos(x) + B\sin(x))e^{-2x}, \quad \text{où } (A, B) \in \mathbb{R}^2}$$

2.4) On cherche une solution particulière de **(E2)** sous la forme

$$y_p : x \longmapsto Ce^{-x}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

On a

$$\begin{aligned}
y_p \text{ solution de } \textbf{(E3)} &\iff y_p''(x) + 4y_p'(x) + 5y_p(x) = \lambda e^{-x} \\
&\iff Ce^{-x} - 4Ce^{-x} + 5Ce^{-x} = \lambda e^{-x} \\
&\iff C - 4C + 5C = \lambda \quad \textit{car : } \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} \neq 0 \\
&\iff 2C = \lambda \\
&\iff C = \frac{\lambda}{2}.
\end{aligned}$$

Une solution particulière est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-x}$.
L'équation homogène associée à **(E2)** étant **(H2)**, les solutions de **(E2)** sont donc les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{y(x) = (A\cos(x) + B\sin(x))e^{-2x} + \frac{\lambda}{2}e^{-x}, \quad \text{où } (A, B) \in \mathbb{R}^2}$$

2.5) Reprenons le tout. D'après ce qui précède, si $f \in \mathscr{S}$, c'est-à-dire si f est solution de **(H)**, alors

$$f'' + 4f' + 5f = g,$$

où g est solution de l'équation différentielle **(H1)** : $y' + y = 0$, ce qui implique qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \lambda e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ de sorte que f vérifie l'équation différentielle

$$\textbf{(E2)} :\ f'' + 4f' + 5f = \lambda e^{-x}.$$

D'après la question **2.4)**, il existe alors deux réels A et B tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (A\cos(x) + B\sin(x))e^{-2x} + \frac{\lambda}{2}e^{-x}.$$

Ainsi, il existe $(\lambda, A, B) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{\lambda}{2}\underbrace{e^{-x}}_{=g_1(x)} + A\underbrace{\cos(x)e^{-2x}}_{=g_2(x)} + B\underbrace{\sin(x)e^{-2x}}_{=g_3(x)},$$

ce qui revient à dire que f est une combinaison linéaire de g_1, g_2, g_3 donc $f \in \mathscr{E}$. On a donc : $\boxed{\mathscr{S} \subset \mathscr{E}}$.
Par double inclusion : $\boxed{\mathscr{S} = \mathscr{E}}$