Chapitre # (AN) 2

Primitives & Calcul intégral

D'après un théorème de Liouville*, la fonction* $x \longmapsto e^{-x^2}$ *ne possède pas de primitive qui puisse s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles* (ln, exp, cos, sin *etc.*).

— Le saviez-vous ?

Résumé & Plan

Le but de ce chapitre est de rappeler la notion de primitive vue en Terminale, en vue d'obtenir un calcul pratiques d'intégrales. D'autres méthodes de calcul d'intégrales (intégration par parties, changement de variables) seront vues en complément *etc.*

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

1. CALCULS DE PRIMITIVES

1.1. Généralités

Définition 1 | Primitives

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un *intervalle* I de $\mathbb{R}$. On appelle *primitive* de f sur I toute fonction $\mathrm{F} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\mathrm{F}' = f$.

Une primitive réalise l'opération inverse de la dérivation : on part d'une fonction, et on cherche à savoir si elle s'écrit sous forme d'une dérivée.

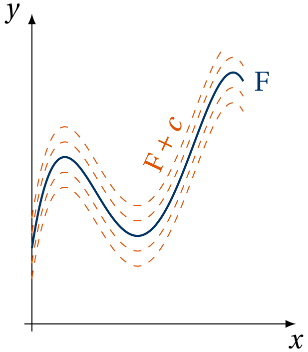
Exemple 1 **(Des exemples de primitives)**

- $\mathrm{F} : x \longmapsto e^x - \ln(x)$ est une primitive de $f : x \longmapsto e^x - \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $\mathrm{G}_1 : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2}$ et $\mathrm{G}_2 : x \longmapsto \dfrac{x^2}{2} - 6$ sont des primitives de $g : x \longmapsto x$ sur $\mathbb{R}$.

L'exemple précédent suggère que si une fonction f possède une primitive sur un intervalle I, alors f possède une infinité de primitives (définies « à une constante près »). C'est ce que nous allons démontrer dans la prochaine proposition.

Proposition 1 | Ensemble des primitives

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. Si $\mathrm{F} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est **une** primitive de f sur l'intervalle I, alors **les** primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $\mathrm{F} + c$, où $c \in \mathbb{R}$.



On retiendra notamment que si f admet une primitive, alors elle en admet même une infinité : puisque si F est une primitive, toutes les fonctions $\mathrm{F}+c$ avec c une constante en sont aussi. Il n'est donc pas question de parler de *la* primitive de f. Nous admettons le théorème ci-après, difficile à démontrer.

Preuve

Théorème 1 | Existence de primitives pour les fonctions continues

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors :

- f possède une primitive sur I.
- **[Unicité si une valeur est fixée]** Pour tout $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F telle que $\mathrm{F}(x_0) = y_0$.

Graphiquement, parmi toutes les primitives de f, il n'en existe qu'une seule F dont la courbe représentative $\mathscr{C}_\mathrm{F}$ passe par le point (x_0, y_0).

Preuve Nous admettons l'existence. Démontrons l'unicité avec condition initiale.

Méthode Justifier l'existence d'une primitive

Il suffit de montrer la continuité de la fonction, le plus souvent en utilisant des théorèmes d'opérations élémentaires sur les fonctions continues.

Remarque 1 Ainsi, pour justifier l'existence d'une primitive d'une fonction sur un intervalle, il suffit parfois d'invoquer la continuité de la fonction. Attention, ce n'est pas parce qu'une fonction admet des primitives qu'elles s'expriment explicitement. Par exemple la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive sur tout intervalle I. Néanmoins, il a été démontré que cette primitive n'est pas exprimable à l'aide des fonctions usuelles (puissances, exponentielle, logarithme, trigonométriques, ...).

Enfin, la propriété de linéarité de la dérivation se transmet alors automatiquement aux primitives.

Proposition 2 | Linéarité de la primitivation

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, F une primitive de f et G une primitive de g. Alors : pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda\mathrm{F} + \mu\mathrm{G}$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.

Preuve Immédiat par linéarité de la dérivation : $(\lambda\mathrm{F}+\mu\mathrm{G})' = \lambda\mathrm{F}' + \mu\mathrm{G}' = \lambda f + \mu g$.

Exemple 2 Pour chaque entier i, déterminer l'expression d'une primitive F_i de f_i sur un intervalle I_i à préciser.

1. $f_1 : x \longmapsto 2x$
2. $f_2 : x \longmapsto x^2 - 3x + 1$
3. $f_3 : x \longmapsto \mathrm{e}^x$
4. $f_4 : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$
5. $f_5 : x \longmapsto \cos x$
6. $f_6 : x \longmapsto \sin x$

7. $f_7 : x \longmapsto e^{7x}$

8. $f_8 : x \longmapsto \sin(3x)$

Exemple 3 Pour $x > 0$, on pose $F(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, et calculer la dérivée. Que remarque-t-on ?

1.2. Primitives de fonctions usuelles

Dans les tableaux suivants, pour chaque fonction f définie sur un *intervalle* I précisé, on donne *une* primitive F. Les primitives suivantes doivent être connues par cœur, ou *a minima* être retrouvées rapidement.

$f(x) = \dots$	$F(x) = \dots$	$x \in I \subset \dots$	**Condition**
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $n < 0$	$n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0,+\infty[$	$\alpha \neq -1$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	
$\dfrac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$\mathbb{R}\setminus\{a\}$	$a \in \mathbb{R}$
e^{ax}	$\dfrac{e^{ax}}{a}$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}^*$
$\sin(ax)$	$\dfrac{-\cos(ax)}{a}$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}^*$
$\cos(ax)$	$\dfrac{\sin(ax)}{a}$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{Arctan}(x)$	$\mathbb{R}$	

À l'aide des formules du tableau et de la dérivation d'une composée, on peut calculer une primitive de $u'u^n$, $\dfrac{u'}{u^n}$, $\dfrac{u'}{u}$, $u'\cos u$, $u'\sin u$, $u'e^u$ *etc.* lorsque u est dérivable (sous réserve de la bonne définition de la composée). Voir le tableau ci-après.

$f(x) = \dots$	$F(x) = \dots$
$u' \times u^a,\ a \neq -1$	$\dfrac{1}{a+1}u^{a+1}$
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$
$u' \times \exp(u)$	$\exp(u)$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$
$u' \times \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \times \sin(u)$	$-\cos(u)$
$\dfrac{u'}{\cos^2(u)} = u'\left(1+\tan^2(u)\right)$	$\tan(u)$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$

Exemple 4 Pour chaque entier i, déterminer l'expression d'une primitive F_i de f_i sur l'intervalle I_i, avec :

1. $f_1(x) = 2^x$, $\quad I_1 = \mathbb{R}$

2. $f_2(x) = \sqrt{2x+1}$, $\quad I_2 = \left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

3. $f_3(x) = \tan(x)$, $\quad I_3 = \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

4. $f_4(x) = \dfrac{1}{x}\ln(x)$, $\quad I_4 =]0,+\infty[$

PRIMITIVES VIA LINÉARISATION Décrivons méthode usuelle concernant les fonctions trigonométriques.

Méthode — Calcul d'une primitive avec des fonctions trigonométriques

1. Commencer par linéariser l'expression, à l'aide de nombres complexes si besoin.
2. Primitiver avec les formules usuelles.

Exemple 5 Déterminer, sur un ensemble à préciser, une primitive de $x \longmapsto \cos^3 x$.

2. INTÉGRALE SUR UN SEGMENT

2.1. Primitive et intégrale sur un segment

Nous allons introduire une notation qui sera étudiée plus en détail plus tard dans l'année (au second semestre). Nous ne motivons pas encore outre mesure son introduction, pour l'instant il faudra juste comprendre son utilité pour le calcul de primitives.

Cadre
Dans toute cette sous-section, la notation $[a,b]$ désignera toujours un segment, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Définition/Proposition 1 | Intégrale d'une fonction continue sur un segment
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$. On appelle *intégrale de f sur le segment* $[a,b]$ le réel noté $\displaystyle\int_a^b f$ $\left(\text{ou encore } \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\ \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$ défini par :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \underset{\textbf{(défi.)}}{=} [\mathrm{F}(x)]_a^b \underset{\textbf{(défi.)}}{=} \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a),$$

(où F désigne **une** primitive de f).

On appelle *intégrande de* $\displaystyle\int_a^b f$ la fonction f.

Remarque 2

- Si $a = b$, alors avec les notations de la définition précédente, on a :
$$\int_a^a f = [\mathrm{F}]_a^a = \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(a) = 0.$$
- La variable utilisée dans l'intégrale est, comme dans les sommes et produits, **muette**.

Preuve La quantité $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas de la primitive choisie.

La définition de l'intégrale est donc bien posée.

Exemple 6 Calculer les intégrales ci-après.

1. $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(-4x^3 + x^2 - 1\right)\mathrm{d}x$

2. $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2x-1}$

3. $\mathrm{I}_3 = \displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$

4. $\mathrm{I}_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t$

5. $\mathrm{I}_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$

6. $\mathrm{I}_6 = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$

PROPRIÉTÉS CALCULATOIRES DE L'INTÉGRALE. L'idée est ici seulement d'établir les propriétés qui vont nous servir pour le calcul de primitives. Nous viendrons compléter cette liste plus tard, dans le chapitre du second semestre dédié aux compléments sur l'intégration.

Proposition 3 | Propriétés de l'intégrale.

Soient I un intervalle et $(a,b) \in \mathrm{I}^2$. Alors :

1. **[Linéarité]** Pour tout $(f,g) \in (\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R}))^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$
2. **[Relation de Chasles]** Soient $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et $c \in \mathrm{I}$. Alors :
$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$
3. **[Ordre des bornes]** Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R})$, alors :
$$\int_a^b f = -\int_b^a f.$$

Preuve

1.

2.

3.

La relation de Chasles permet de calculer notamment des intégrales dont l'intégrande est définie par morceaux, voyons un exemple avec la valeur absolue.

Exemple 7 Calculer $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x)|\,\mathrm{d}x$.

Citons également deux propriétés parfois utiles dans les calculs, qui concernent le crochet.

Proposition 4 | Propriétés du crochet

Soient I un intervalle et $(a,b) \in \mathrm{I}^2$.

1. **[Linéarité]** Soient $\mathrm{F},\mathrm{G} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$[\lambda \mathrm{F} + \mu \mathrm{G}]_a^b = \lambda [\mathrm{F}]_a^b + \mu [\mathrm{G}]_a^b.$$
2. **[Ordre des bornes]** Si $\mathrm{F} : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, alors :
$$[\mathrm{F}]_a^b = -[\mathrm{F}]_b^a.$$

Preuve

1.

2.

LIEN ENTRE PRIMITIVE ET INTÉGRALE. Par définition de l'intégrale, il est nécessaire de connaître une primitive pour la calculer, il existe donc un fort lien entre les deux notions. Voyons lequel.

Théorème 2 | Relation fondamentale de l'analyse

Soient I un intervalle, $a \in \mathrm{I}$ et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction :

$$\mathrm{F} : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est **l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a**, elle est de classe $\mathscr{C}^1$. Par conséquent, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, elle est égale à l'intégrale de sa dérivée :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette égalité est appelée assez pompeusement « relation fondamentale de l'analyse ». Pour notre définition de l'intégrale, elle est évidente. Mais pour d'autres définitions, il faut travailler un peu pour l'établir.

Preuve

Méthode Primitiver une fonction en utilisant une intégrale

Lorsque vous avez besoin d'une technique d'intégration (intégration par parties ou changement de variable par exemple) pour primitiver une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I, choisir $a \in \mathrm{I}$, puis calculer $\int_a^x f$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Si la fonction f n'est pas définie en un point, on prendre garde à bien effectuer ces calculs pour les x où c'est possible.

Exemple 8 Donner la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de $x \longmapsto 2^x$.

Remarque 3 Écrire une fonction comme intégrale de sa dérivée peut donner de précieux renseignements sur f si on en connaît certains sur f'. Nous verrons cela plus en détails dans le chapitre de complément sur l'intégration.

3. TECHNIQUES DE CALCULS D'INTÉGRALES

Nous avons vu précédemment que calculer une primitive revient à un calcul d'intégrale. Pour ces dernières nous disposons de deux techniques principales de calcul : l'intégration par parties et le changement de variable. Ces techniques doivent être envisagées naturellement lorsque l'intégrande ne se primitive pas de manière évidente.

3.1. Intégration par parties

La formule d'intégration par aprties sert dès que l'on souhaite intégrer un produit dont l'un des termes devient plus simple en le dérivant.

Théorème 1 | Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$. Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

On utilise une intégration par parties dès que $\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ est plus simple à calculer que $\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$: on ne s'occupe pas trop du crochet, puisque c'est un terme qui se calculera de toute façon.

Attention

Pour la première intégration par parties sur une copie, on n'oublie pas de préciser que u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ (afin de prouver que l'on connaît bien les hypothèses du théorème).

Preuve

Méthode **Quand utiliser l'intégration par parties ?**

La formule d'intégration par parties permet de résoudre essentiellement deux types de problèmes :

1. calculer la valeur d'une intégrale lorsqu'une primitive ne « saute pas » aux yeux.
2. déterminer des relations de récurrence entre intégrales dépendantes d'un entier n.

Quand on veut calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ en ayant recours à une intégration par parties, on est amené à suivre la démarche suivante :

- On écrit f comme un produit de deux fonctions $f = gh$.
- On doit alors choisir laquelle on « primitivera » (c'est-à-dire laquelle on écrira sous la forme u', avec u à déterminer) et laquelle on dérivera, le produit s'écrit alors $f = gh = u'v$.

Quelle est la fonction que l'on a intérêt à dériver ?

- Si on ne sait pas primitiver l'une des deux, le choix est vite fait ...
- On a très envie de dériver ln (et encore plus arctan), les dérivées étant plus simples. On a plutôt envie de dériver un polynôme (la dérivée est plus simple puisque le degré est alors abaissé), cela nous est égal de dériver ou de primitiver exp, sin et cos.
- Ainsi, pour un « polynôme » × exp, on dérivera le polynôme et on primitivera exp alors que pour un « polynôme » × ln, on dérivera ln et on primitivera le polynôme.
- Parfois on forcera l'apparition d'un produit dans l'expression de f en écrivant que $u' = 1$ et $v = f$.
- Parfois, on effectuera plusieurs IPP successives par exemple pour calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 x^2 \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.
- Pour une intégrale du type exp × cos (ou exp × sin), on effectuera deux IPP successives pour retomber sur cos (si on dérive l'une des fonctions, on continue à la dériver à la deuxième IPP, sinon, on « revient en arrière »). On obtient alors une relation du type $\mathrm{I} = a + b\mathrm{I}$ (avec $b \neq 1$) et donc $(1-b)\mathrm{I} = a$ et $\mathrm{I} = \dfrac{a}{1-b}$.
- Parfois on obtient avec une IPP $\mathrm{I} = \mathrm{I}$. Ce n'est pas faux, mais inutile... Par contre, avec $\mathrm{I} = a + b\mathrm{I}$ (autrement dit : on voit réapparaître l'intégrale I) et $b \neq 1$ on pourra conclure (*cf.* plus haut).

« *Echec* »

« *Réussite* »

Exemple 9 Calculer les intégrales suivante.

1. $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$

2. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t^2 \ln(t) \,\mathrm{d}t.$

3. $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{Arctan}(t).$

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(4x)\,\mathrm{d}x$

3.2. Changement de variable

CHANGEMENT DE VARIABLE. Voici à présent une technique ressemblant assez fortement à celle de changement d'indice vue pour les sommes et produits. Autant nous étions assez contraints pour les changements d'indices (seuls quelques changements étaient autorisés), autant pour les intégrales la plupart des fonctions $\mathscr{C}^1$ conviendront. Voici la formule.

Théorème 2 | Formule du changement de variable

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur un intervalle I, et $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathrm{I}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ appelée *fonction de changement de variable*. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

« On pose $x = \varphi(t)$ »

Contrairement aux changements d'indices dans les sommes, on vous donnera toujours le changement de variable à réaliser. En revanche, vous devez savoir le mettre en place, et le justifier.

Attention

Tout changement de variable doit être justifié, en rappelant convenablement les hypothèses.

Preuve *(Point clef — Intégrer la formule de dérivation d'une composée.)*

Dans la pratique, on réalise assez peu souvent un changement de variable en essayant de « coller » à cette formule. On utilise plutôt les calculs formels ci-après, qui correspondent à la formule de changement de variable.

Dans la pratique, on retiendra seulement les deux méthodes qui suivent, ainsi que l'hypothèse importante de la formule : le caractère $\mathscr{C}^1$.

Méthode Changement implicite – Ancienne variable en fonction de la nouvelle

Pour répondre à une question de type « Calculer $\int_a^b f(t)\,dt$ à l'aide du changement de variable $t = \varphi(u)$ », il faut :

1. Différencier l'expression : $dt = \varphi'(u)\,du$.
2. Changer les bornes de l'intégrale c'est-à-dire trouver deux réels a' et b' tels que $a = \varphi(a')$ et $b = \varphi(b')$ (les nouvelles bornes de l'intégrale sont alors a' et b').
3. Vérifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment d'extrémités a' et b' (**c'est la fonction qui définit le changement de variables qui doit être de classe $\mathscr{C}^1$** sur son domaine de définition).
4. « Remplacer » les t par des $\varphi(u)$ dans l'intégrale. Effectuer le changement de variables : la nouvelle intégrale est normalement plus simple à calculer !

Exemple 10 Calculer $I_1 = \displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x + x(\ln x)^2}$, en posant $x = e^t$.

Remarquons qu'ici, on exprime l'ancienne variable en fonction de la nouvelle.

Exemple 11 Calculer $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ en posant $x = \sin(t)$.

Remarquons qu'ici, on exprime l'ancienne variable en fonction de la nouvelle.

Méthode Changement explicite – Nouvelle variable en fonction de l'ancienne

Pour répondre à une question de type « Calculer $\int_a^b f(t)\,dt$ à l'aide du changement de variable $u = \varphi(t)$ », il faut :

1. Différencier : $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Repérer $\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ dans l'intégrale, sinon, faire apparaître ce terme « de force ».
2. Calculer les nouvelles bornes de l'intégrale $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.
3. Vérifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ (**c'est la fonction qui définit le changement de variables qui doit être de classe** $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition).
4. « Repérer » des $\varphi(t)$, à remplacer par des u dans l'intégrale. Effectuer le changement de variable : la nouvelle intégrale est souvent plus simple à calculer !

Exemple 12 Calculer l'intégrale $\mathrm{I}_4 = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$ en posant $x = \cos(t)$.
Remarquons qu'ici, on exprime la nouvelle variable en fonction de l'ancienne.

Exemple 13 Calculer l'intégrale $\mathrm{I}_5 = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{1+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ en posant $x = 1+\mathrm{e}^t$.
Remarquons qu'ici, on exprime la nouvelle variable en fonction de l'ancienne.

3.3. Complément : primitives de fractions rationnelles [H.P]

Méthode Primitives de fractions rationnelles

On sait déterminer une primitive des fonctions de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ où a, b et c sont des constantes réelles et $a \neq 0$. Il suffit de discuter selon la valeur du discriminant Δ :

1. si $\Delta > 0$, alors on factorise le dénominateur pour se ramener à $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}$, puis on écrit la fraction comme somme de deux autres *(vous serez toujours guidés à cette étape dans les exercices)* qui se primitivent avec un logarithme.
2. Si $\Delta = 0$, alors on factorise le dénominateur pour se ramener à $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-\alpha)^2}$,
3. si $\Delta < 0$, alors on met le dénominateur **sous forme canonique** et on se ramène à un calcul de primitive à l'aide de la fonction arctan.

Remarque 4 Pour le cas $\Delta > 0$, la décomposition de la fraction sera toujours rappelée.

Exemple 14 Déterminer une primitive des fonctions suivantes sur un domaine à préciser.

- $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2x^2 + x - 1}$

- $g : x \longmapsto \dfrac{1}{4x^2 - 4x + 1}$

- $h : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

4. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Connaître la définition de l'intégrale de fonctions continues sur un segment
2. Concernant les primitives :
   - connaître les primitives usuelles ☐
   - savoir déterminer des primitives dans les cas de dérivation classique ☐
   - connaître les opérations sur les primitives ☐
3. Connaître les différentes propriétés de l'intégrale :
   - linéarité de l'intégrale, ☐
   - relation de CHASLES ☐
4. Concernant les méthodes de calcul d'intégrales :
   - l'intégration par parties ☐
   - le changement de variable ☐

4.1. Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 1 | **Primitives par calcul direct** Solution Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \longmapsto \cos(3x)$
2. $x \longmapsto \cos^3(x)$
3. $x \longmapsto \cos(x)\sin^4(x)$
4. $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$
5. $x \longmapsto \tan(x)$
6. $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
7. $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
8. $x \longmapsto \dfrac{1}{e^x+1}$
9. $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$
10. $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$
11. $x \longmapsto \dfrac{5x-12}{x(x-4)}$ *Indication : On commencera par chercher $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\dfrac{5x-12}{x(x-4)} = \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-4}$ pour tout x dans un ensemble à préciser*

Exercice 2 | **Primitives avec arctan** Solution Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+3}$
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+16}$
3. $x \longmapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$
4. $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$
5. $x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$
6. $x \longmapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}$

Exercice 3 | **Calculs d'intégrales à l'aide d'une primitive.** Solution Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x}\,dx$
2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^\pi |\cos(x)|\,dx$
4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx$
5. $\displaystyle\int_0^1 t^2 2^{t^3}\,dt$
6. $\displaystyle\int_{-1}^3 \max(2,x)\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx$

Exercice 4 | **Intégrales avec intégration par parties** Solution Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^\pi x\cos(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 x(1-x)^n\,dx,\ n\in\mathbb{N}$
4. $\displaystyle\int_1^t x^n\ln(x)\,dx,\ n\in\mathbb{N},\ t>0$

Exercice 5 | **Primitives avec intégration par parties** Solution Calculer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité :

1. $x \longmapsto x^3\cos(6x)$
2. $x \longmapsto x\cos^2(x)$
3. $x \longmapsto x^2e^{-x}$
4. $x \longmapsto x^3e^{-x^2}$

Exercice 6 | **Intégrales par changement de variable** Solution Calculer les intégrales suivantes par changement de variable :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x)+\tan^3(x))\,dx \quad (u=\tan x)$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,dt$ à l'aide du changement de variable $x=e^t$.

3. Calculer $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ en commençant par poser $x = \dfrac{1}{t}$

4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ *Indication : Poser $x = \tan t$*

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n\,dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n\,dx$ *Indication : on pourra utiliser que pour tout nombre réel x, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$*

Exercice 7 | **Un calcul de limite** Solution Calculer : $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$.

Exercice 8 | **Primitive par changement de variable** Solution À l'aide du changement de variable indiqué entre parenthèses, calculer une primitive des fonctions d'une variable réelle suivantes.

1. $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^4}$ $(u = t^2)$

2. $x \longmapsto \dfrac{1}{2+\sqrt{x}}$ $(u = 2+\sqrt{t})$

3. $x \longmapsto e^{2x}\sin(e^x)$ $(u = e^t)$

4. $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ $(u = \sqrt{t})$

5. $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^4(x)}$ $(u = \tan(t))$

6. $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)}$ $(u = \sqrt{\sin(t)})$

7. $x \longmapsto \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ $(u = e^t)$

Exercice 9 | **Intégrales de fractions rationnelles (1)** Solution Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$

2. $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+3}{x^2-1}\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$ *On pourra commencer par effectuer le changement $u = e^x$*

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$

Exercice 10 | **Intégrales de fractions rationnelles (2)** Solution

1. Montrer que :
$$\forall x \in [-1,1],\quad \frac{x+1}{x^2+4x+5} = \frac{1}{2}\times\frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{1}{x^2+4x+5},$$
puis que : $\dfrac{1}{x^2+4x+5} = \dfrac{1}{(x+2)^2+1}$. En déduire
$$\int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx.$$

2. Avec la même méthode, calculer $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{2x-x^2-4}\,dx$.

Exercice 11 | Solution

1. Soit f continue sur $[a,b]$. Montrer que
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) Énoncé On rappelle que les primitives sont toutes définies à une constante près. Ici je ne fais pas apparaître les constantes que je prends toujours égales à 0.

1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{F(x)=\dfrac{\sin(3x)}{3}}$: Primitive usuelle.
2. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{F(x)=\dfrac{\sin(3x)}{12}+\dfrac{3}{4}\sin x=\sin(x)-\dfrac{\sin^3(x)}{3}}$: Linéarisation ou utilisation du fait que la puissance est impaire pour faire apparaître la forme $u'u^2$.
3. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{F(x)=\dfrac{\sin^5(x)}{5}}$: Reconnaître la forme $u'u^4$.
4. La fonction est continue sur $\mathbb{R}\smallsetminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Il existe donc par exemple F une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ (par exemple) : $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{\cos x}}$: on reconnaît une primitive de la forme $-\dfrac{u'}{u^2}$.
5. La fonction est continue sur $\mathbb{R}\smallsetminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \middle|\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. Il existe donc par exemple F une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ (par exemple) : $\boxed{F(x)=-\ln|\cos x|=-\ln(\cos x)}$: on reconnaît une primitive de la forme $-\dfrac{u'}{u}$.
6. La fonction est continue sur $\mathbb{R}^{+\star}\smallsetminus\{1\}$. Il existe donc F une primitive sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x\in]1,+\infty[$ (par exemple) : $\boxed{F(x)=\ln|\ln x|=\ln(\ln x)}$: on reconnaît une primitive de la forme $\dfrac{u'}{u}$.
7. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car $1+x^2>0$. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{F(x)=\sqrt{1+x^2}}$: on reconnaît une primitive de la forme $\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.
8. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur est non nul comme somme de deux termes strictements positifs. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{F(x)=x-\ln|e^x+1|=x-\ln(e^x+1)}$: On utilise l'astuce $1=1+e^x-e^x$ puis on coupe en deux et on reconnaît sur l'un des deux bouts : $\dfrac{u'}{u}$.
9. La fonction est continue sur $]1,+\infty[$. Il existe donc F une primitive sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x\in]1,+\infty[$: $\boxed{F(x)=2\sqrt{x-1}}$: on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.
10. La fonction est continue sur $\mathbb{R}\smallsetminus\{-3,1\}$. Il existe donc par exemple F une primitive sur $]-3,1[$ et pour tout $x\in]-3,1[$ (par exemple) : $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-3\right|=-\ln(-x^2-2x+3)}$: on reconnaît une primitive de la forme $\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$.
11. * La fonction est continue sur $\mathbb{R}\smallsetminus\{0,4\}$. Il existe donc F une primitive sur par exemple $]-\infty,0[$ et pour tout $x\in]-\infty,0[$: $\boxed{F(x)=3\ln|x|+2\ln|x-4|=3\ln(-x)+2\ln(4-x)}$: on commence par chercher $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\dfrac{5x-12}{x(x-4)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-4}$.

Solution (exercice 2) Énoncé

1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur est non nul comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)}$: on reconnaît une primitive de la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$ en mettant le 3 en facteur au dénominateur.
2. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur ne s'annule pas comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{4}\arctan\left(\dfrac{x}{4}\right)}$: on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$ après avoir mis 16 en facteur au dénominateur.
3. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur ne s'annule pas comme somme de deux termes strictement positifs. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{F(x)=\arctan(e^x)}$: on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$.
4. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur est non nul comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{F(x)=\arctan(\sin x)}$: on reconnaît une primitive de la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$.
5. La fonction est continue sur $]0,+\infty[$. Il existe donc F une primitive sur $]0,+\infty[$

et pour tout $x \in]0,+\infty[$: $\boxed{F(x) = 2\arctan(\sqrt{x})}$: on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$ en écrivant que : $x = (\sqrt{x})^2$ et en remarquant que la dérivé de la racine carré est bien $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

6. La fonction est continue sur $]-\infty, 2\ln 2[$ car : $4-e^x > 0 \iff 2\ln 2 > x$. Il existe donc F une primitive sur $]-\infty, 2\ln 2[$ et pour tout $x \in]-\infty, 2\ln 2[$: $\boxed{F(x) = -2\sqrt{4-e^x}}$: on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Solution (exercice 3) Énoncé

1. On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$ (à constante près) :

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{1-x}\,dx &= -\int_2^3 \frac{-1}{1-x}\,dx\\ &= [-\ln(|1-x|)]_2^3\\ &= \ln(|1-2|) - \ln(|1-3|)\\ &= \ln(1) - \ln(2)\\ &= \boxed{-\ln(2)}\end{aligned}$$

2. On reconnaît la forme $-\dfrac{u'}{u^2}$ et ainsi :

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx &= \left[\frac{1}{1-x}\right]_2^3\\ &= \frac{1}{1-3} - \frac{1}{1-2}\\ &= -\frac{1}{2} + 1\\ &= \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

3. On utilise la relation de de CHASLES pour couper en deux l'intégrale et ainsi pouvoir enlever la valeur absolue, sachant que sur l'intervalle $[0,\pi]$, on a :

$$\cos(x) \geq 0 \iff x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi |\cos(x)|\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos(x)\,dx\\ &= [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) - \sin(\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 1 - 0 - 0 + 1\\ &= \boxed{2}.\end{aligned}$$

4. On reconnaît la forme $u'u$ et ainsi :

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx &= \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^2\\ &= \boxed{\frac{(\ln 2)^2}{2}}\end{aligned}$$

5. Soit $t \in [0,1]$, on a : $\quad t^2 2^{t^3} = t^2 e^{t^3 \ln(2)}$.
On reconnaît alors la forme $u'e^u$ (à constante près) et :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2 2^{t^3}\,dt &= \int_0^1 t^2 e^{t^3\ln(2)}\,dt\\ &= \frac{1}{3\ln(2)} \int_0^1 (3t^2\ln(2)) e^{t^3\ln(2)}\,dt\\ &= \frac{1}{3\ln(2)} \left[e^{t^3\ln(2)}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{3\ln(2)} (e^{\ln(2)} - 1)\\ &= \boxed{\frac{1}{3\ln(2)}}\end{aligned}$$

6. En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 \max(2,x)\,dx &= \int_{-1}^2 2\,dx + \int_2^3 x\,dx\\ &= (2-(-1)) \times 2 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3\\ &= 6 + \frac{9}{2} - \frac{4}{2}\\ &= \frac{12+9-4}{2}\\ &= \boxed{\frac{17}{2}}\end{aligned}$$

7. Ici, l'intégrande ne s'intègre pas à vue d'oeil. On utilise une petite astuce "−1+1" et on obtient que :

$$\frac{x^2}{1+x}=\frac{x^2-1+1}{1+x}=\frac{(x-1)(x+1)+1}{1+x}x-1+\frac{1}{1+x}.$$

Une primitive est alors $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+\ln|1+x|$ et on obtient après calculs :

$\boxed{I=-\dfrac{1}{2}+\ln(2)}$.

Solution (exercice 4) Énoncé

1. Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto \sin(x)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos(x)\,dx &= [x\sin(x)]_0^\pi-\int_0^\pi \sin(x)\,dx\\ &=[\cos(x)]_0^\pi\\ &=\cos(\pi)-\cos(0)\\ &=-1-1\\ &=\boxed{-2}\end{aligned}$$

2. Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto \dfrac{e^{2x}}{2}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{2x}\,dx &= \left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{e^{2x}}{2}\,dx\\ &=\frac{1}{2}e^2-\left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1\\ &=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}(e^2-1)\\ &=\frac{2e^2-e^2+1}{4}\\ &=\boxed{\frac{e^2+1}{4}}\end{aligned}$$

3. Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(1-x)^n\,dx &= \left[-x\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1+\int_0^1\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\,dx\\ &=\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\right]_0^1\\ &=\boxed{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}\end{aligned}$$

4. Les fonctions $x\mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ et $x\mapsto \ln(x)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,t]$ (ou sur $[t,1]$), par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^t x^n\ln(x)\,dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)\right]_1^t-\int_1^t\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &=\frac{t^{n+1}\ln t}{n+1}-\int_1^t\frac{x^n}{n+1}\,dx\\ &=\frac{t^{n+1}\ln t}{n+1}-\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^t\\ &=\boxed{\frac{t^{n+1}\ln t}{n+1}-\frac{t^{n+1}-1}{(n+1)^2}}\end{aligned}$$

Solution (exercice 5) Énoncé Dans tous ces exemples, on ne peut pas calculer directement une primitive... L'idé alors d'exprimer cette primitive sous la forme d'une intégrale pour pouvoir la calculer plus facilement. On ne détaille pas tous les calculs, seulement des indications pour guider l'intégration par parties.

1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{F(x)=\int_0^x t^3\cos(6t)\,dt=\frac{x^3\sin(6x)}{6}+\frac{x^2\cos(6x)}{12}-\frac{x\sin(6x)}{36}-\frac{\cos(6x)}{6^3}}.$$

Trois intégration par parties en dérivant le polynôme.

2. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{2}\int_0^x t\cos(2t)\,dt+\frac{x^2}{4}=\frac{x\sin(2x)}{4}+\frac{\cos(2x)}{8}+\frac{x^2}{4}}.$$

Linéarisation du cosinus carré puis une intégration par parties.

3. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{F(x)=\int_0^x \arctan(t)\,dt=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}.$$

1 intégration par parties en dérivant la fonction arctangente et en intégrant 1

puis on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$.

4. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \int_0^x t^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x}.}$$
2 intégration par parties en dérivant le polynôme.

5. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \int_0^x t^3 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{(x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2}}{2}}.$$
1 intégration par parties en dérivant le polynôme $t \longmapsto t^2$ et en intégrant $t \longmapsto t e^{-t^2}$ où on reconnaît $u'\mathrm{e}^u$ (ici on commence par écrire que $t^3 = t^2 \times t$). Puis dans la nouvelle intégrale de l'intégration par parties, on reconnaît encore la forme $u'\mathrm{e}^u$.

Solution (exercice 6) Énoncé

1. Notons I l'intégrale à calculer. Calculons I grâce à un changement de variable : on pose $u = \tan x$, $\mathrm{d}u = (1+\tan^2(x))\,\mathrm{d}x =$.
Lorsque $x = 0$, $u = 0$ et lorsque $x = \frac{\pi}{4}$, $u = 1$. De plus $\varphi : x \longmapsto \tan(x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x) + \tan^3(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)(1+\tan^2(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 u\,\mathrm{d}u\\ &= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1\\ &= \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

2. Posons $x = \mathrm{e}^t$ de sorte que $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. Lorsque $t = 0$, alors $x = 1$ et lorsque $t = 1$, alors $x = \mathrm{e}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, d'après le théorème de changement de variables,
$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan(x)]_1^{\mathrm{e}} = \boxed{\arctan(\mathrm{e}) - \frac{\pi}{4}}.$$

3. Posons $x = \dfrac{1}{t}$ de sorte que $\mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$. Si $x = 1$, alors $t = 1$ et si $x = \mathrm{e}$, alors $t = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, 1\right]$, par le théorème de changement de variables,
$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{\cancel{t^2}}}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{\cancel{t^2}}\right) = \int_1^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$$
Cette dernière intégrale se calcule par intégration par parties. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(t)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}, 1\right]$,
$$\begin{aligned}\int_1^{\frac{1}{\mathrm{e}}} \ln(t)\,\mathrm{d}t &= [t\ln(t)]_1^{\frac{1}{\mathrm{e}}} - \int_1^{\frac{1}{\mathrm{e}}} t \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} - \int_1^{\frac{1}{\mathrm{e}}} 1\,\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{\mathrm{e}} - \left(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right)\\ &= 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$
D'où : $\boxed{\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}}$

4. Faisons le changement $x = \tan t$, $\mathrm{d}x = \left(1+\tan^2(t)\right)\mathrm{d}t$.
Comme la fonction tan est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, par le théorème de changement de variables : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(1+\tan^2(t)\right)\mathrm{d}t}{(1+\tan^2(t))^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\tan^2(t)}}$.
Mais comme $1+\tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$, on a $\sqrt{1+\tan^2} = \dfrac{1}{|\cos t|}$. Donc puisque cos est positive sur $[0, \pi/4]$, on a :
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

5. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n\,\mathrm{d}x$, considérons le changement de variable affine $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ (si le changement de variable est affine, pas besoin de justifier le caractère $\mathscr{C}^1$ mais si on devait le justifier, il faut dire que la fonction $t \mapsto \dfrac{\pi}{2} - t$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$), de sorte que $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. On a alors :

$$\int_0^{\pi/2}(\cos x)^n\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)^n(-\mathrm{d}t)=\boxed{\int_0^{\pi/2}(\sin t)^n\,\mathrm{d}t}$$

Solution (exercice 7) Énoncé **Calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.**

- On pose $f(x)=\int_1^x\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $x\longmapsto 1$ et $x\longmapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction $t\longmapsto\frac{t^2}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a bien que la fonction f est continue sur $[1,x]$.
- On pose de plus la fonction $g:t\longmapsto\frac{t^2}{1+t^2}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions continues et ainsi elle admet bien une primitive G sur $\mathbb{R}$, primitive qui est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\mathrm{G}(x)-\mathrm{G}(1)$.
- On pose alors pour tout $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{1\}$: $h(x)=\frac{f(x)}{x-1}$. On remarque alors que l'on a pour tout $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{1\}$: $h(x)=\frac{\mathrm{G}(x)-\mathrm{G}(1)}{x-1}$ ce qui correspond au taux d'accroissement de la fonction G en 1.
- Pour calculer la limite de h en 1, il faut donc étudier la dérivabilité de la fonction G en 1. Or la fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et ainsi elle est en particulier dérivable en 1. Ainsi la limite de h en 1 existe et vaut $\mathrm{G}'(1)=g(1)=\frac{1}{2}$. Donc $\boxed{\lim\limits_{x\longrightarrow 1}h(x)=\frac{1}{2}}$.

Solution (exercice 8) Énoncé

1.
- Existence : la fonction $x\longmapsto\frac{x}{1+x^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{F}(x)=\int_0^x\frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.
- Calcul de F grâce à un changement de variable :
  - ◇ On pose : $\begin{cases} u &= t^2\\ \mathrm{d}u &= 2t\,\mathrm{d}t\\ \frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}u}{2(1+u^2)}.\end{cases}$
  - ◇ On a $t=0\implies u=0$, et $t=x\implies u=x^2$.
  - ◇ On a :
    - $\varphi:t\longmapsto t^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
    - $u\longmapsto\frac{1}{2(1+u^2)}$ est continue sur $[0,x^2]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

  Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
  $$\boxed{\mathrm{F}(x)=\int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}u}{2(1+u^2)}=\frac{\arctan(x^2)}{2}}.$$

2.
- Existence : la fonction $x\longmapsto\frac{1}{2+\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme somme et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}^+$ et : $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ \mathrm{F}(x)=\int_0^x\frac{1}{2+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
- Calcul de F grâce à un changement de variable :
  - ◇ On pose : $\begin{cases} u &= 2+\sqrt{t}\\ \mathrm{d}u &= \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}\iff 2(u-2)\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\left(\text{car}\sqrt{t}=u-2\right)\\ \frac{1}{2+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &= \frac{2(u-2)}{u}\,\mathrm{d}u.\end{cases}$
  - ◇ On a $t=0\implies u=2$, et $t=x\implies u=2+\sqrt{x}$.
  - ◇ On a :
    - $\varphi:t\longmapsto 2+\sqrt{t}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
    - $u\longmapsto\frac{2(u-2)}{u}$ est continue sur $[2,2+\sqrt{x}]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

  Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
  $$\boxed{\mathrm{F}(x)=2\int_2^{2+\sqrt{x}}\left(1-\frac{2}{u}\right)\mathrm{d}u=2\sqrt{x}-4\ln\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}.$$

3.
- Existence : la fonction $x\longmapsto\mathrm{e}^{2x}\sin(\mathrm{e}^x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composé et produit de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{F}(x)=\int_0^x\mathrm{e}^{2t}\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$.
- Calcul de F grâce à un changement de variable :
  - ◇ On pose : $\begin{cases} u &= \mathrm{e}^t\\ \mathrm{d}u &= \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\\ \mathrm{e}^{2t}\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t &= u\sin(u)\,\mathrm{d}u.\end{cases}$
  - ◇ On a $t=0\implies u=1$, et $t=x\implies u=\mathrm{e}^x$.
  - ◇ On a :
    - $\varphi:t\longmapsto\mathrm{e}^t$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
    - $u\longmapsto u\sin(u)$ est continue sur $[1,e^x]$ comme somme et quotient de

fonctions continues.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(x)=\int_1^{e^x} u\sin u\,du = -x\cos x+\sin x+\cos(1)-\sin(1)},$$

en faisant une intégration par parties.

4. • Existence : la fonction $x\longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme composé et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}^+$ et : $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt$.

• Calcul de F grâce à un changement de variable :

◇ On pose : $\left\{\begin{array}{rcl} u &=& \sqrt{t}\\ du &=& \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}\\ \dfrac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt &=& \dfrac{2u^2}{1+u^2}\,du.\end{array}\right.$

◇ On a $t=0\Longrightarrow u=0$, et $t=x\Longrightarrow u=\sqrt{x}$.

◇ On a :

– $\varphi : t\longmapsto\sqrt{t}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.

– $t\longmapsto\dfrac{2u^2}{1+u^2}$ est continue sur $[0,\sqrt{x}]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\frac{2u^2}{1+u^2}\,dt = 2(\sqrt{x}-\arctan(\sqrt{x}))},$$

en utilisant l'astuce $u^2=1+u^2-1$.

5. • Existence : la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{\cos^4(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$ comme composé et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur par exemple l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et : $\forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{\cos^4(t)}\,dt$.

• Calcul de F grâce à un changement de variable :

◇ On pose : $\left\{\begin{array}{rcl} u &=& \tan(t)\\ du &=& \dfrac{dt}{\cos^2(t)}\\ \dfrac{dt}{\cos^4(t)} &=& (1+u^2)\,du.\end{array}\right.$

◇ On a $t=0\Longrightarrow u=0$, et $t=x\Longrightarrow u=\tan x$.

◇ On a :

– $\varphi : t\longmapsto\tan(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.

– $u\longmapsto 1+u^2$ est continue sur $[0,\tan(x)]$.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(x)=\int_0^{\tan(x)}(1+u^2)\,du=\tan(x)+\frac{1}{3}\tan^3(x)}.$$

6. • Existence : la fonction $x\longmapsto\dfrac{\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)}$ est continue sur par exemple $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ comme composé et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et : $\forall X\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\sqrt{\sin(t)}}{\cos(t)}\,dt$.

• Calcul de F grâce à un changement de variable :

◇ On pose : $\left\{\begin{array}{rcl} u &=& \sqrt{\sin(t)}\\ du &=& \dfrac{\cos(t)\,dt}{2\sqrt{\sin(t)}}\\ \dfrac{\sqrt{\sin(t)}}{\cos(t)}\,dt &=& \dfrac{2\sin(t)}{\cos^2(t)}\dfrac{\cos(t)}{2\sqrt{\sin(t)}}\,dt\\ &=& \dfrac{2\sin(t)}{1-\sin^2(t)}\dfrac{\cos(t)}{2\sqrt{\sin(t)}}\,dt=\dfrac{2u^2}{1-u^4}\,du.\end{array}\right.$

◇ On a $t=0\Longrightarrow u=0$, et $t=x\Longrightarrow u=\sqrt{\sin(x)}$.

◇ On a :

– $\varphi : t\longmapsto\sqrt{\sin(t)}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.

– $u\longmapsto\dfrac{2u^2}{1-u^4}$ est continue sur $[0,\sqrt{\sin(x)}]$.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(x)=\int_0^{\sqrt{\sin(x)}}\frac{2u^2}{1-u^4}\,du=-\arctan(\sqrt{\sin x})+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{\sin(x)}}{1+\sqrt{\sin(x)}}\right)},$$

en écrivant que $\dfrac{u^2}{1-u^4}=\dfrac{A}{1-u^2}+\dfrac{B}{1+u^2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1-u^2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+u^2}$ puis en écrivant encore $\dfrac{1}{1-u^2}=\dfrac{C}{1-u}+\dfrac{D}{1+u}$.

7. • Existence : la fonction $x\longmapsto\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composé, somme et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{e^t+e^{-t}}\,dt$.

• Calcul de F grâce à un changement de variable :

- On pose : $\begin{cases} u &= e^t \\ du &= e^t\,dt \\ \dfrac{1}{e^t+e^{-t}}\,dt &= \dfrac{du}{1+u^2}. \end{cases}$
- On a $t=0 \implies u=1$, et $t=x \implies u=e^x$.
- On a :
  - $\varphi : t \longmapsto e^t$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
  - $u \longmapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ est continue sur $[1,e^x]$.

  Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
  $$\boxed{F(x)=\int_1^{e^x}\frac{du}{1+u^2}=\arctan(e^x)-\frac{\pi}{4}}.$$

ainsi on cherche deux réls A et B tels que :
$$\frac{u}{u^2+3u+2}=\frac{A}{u+2}+\frac{B}{u+1}.$$
On obtient que : $\dfrac{u}{u^2+3u+2}=\dfrac{2}{u+2}-\dfrac{1}{u+1}$

- Ainsi, on a : $\boxed{I=5\ln(2)-3\ln(3)}$.

4.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi I existe bien.
- ◇ On utilise l'astuce du $+1-1$: $\dfrac{x}{(x+1)^2}=\dfrac{x+1-1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

  ◇ Ainsi, on a : $\boxed{I=\left[\ln|x+1|+\dfrac{1}{x+1}\right]_0^1=\ln(2)-\dfrac{1}{2}}$.

Solution (exercice 9) Énoncé

1.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ (discriminant strictement négatif). Ainsi I existe.
- On reconnaît une forme $\dfrac{u'}{u}$ en posant $u(x)=x^2+x+1$.
- Calcul : $\boxed{I=\left[\ln\left|x^2+x+1\right|\right]_0^1=\ln(3)}$.

2.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{x+3}{x^2-1}$ est continue sur $[2,3]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $[2,3]$ (les racines étant 1 et -1). Ainsi I existe.
- On cherche A et B réls tels que : $\dfrac{x+3}{x^2-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$.
- Calcul : $\boxed{I=[2\ln(|x-1|)-\ln(|x+1|)]_2^3=\ln 3}$.

3.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}$ est continue sur $[0,\ln 2]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ comme somme de trois termes strictement positifs. Ainsi I existe.
- On commence par faire un changement de variable : $u=e^x$, $du=e^x\,dx$, $\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx=\dfrac{u}{u^2+3u+2}\,du$. On a $x=0 \implies u=1$, et $x=\ln 2 \implies u=2$. La fonction $\varphi : x \longmapsto e^x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\ln 2]$ comme fonction usuelle. Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
  $$I=\int_1^2\frac{u}{u^2+3u+2}\,du.$$
- On calcule I à présent. On a $\Delta=1>0$ et les deux racines sont : -2 et -1 et

Solution (exercice 10) Énoncé

1. Les égalités sur les fractions se prouvent simplement par calculs directs. Passons au calcul des intégrales.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+4x+5}$ est continue sur $[-1,1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas (discriminant négatif). Ainsi I existe bien.
- On fait apparaître $\dfrac{u'}{u}$:
  $$I=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{2}\times\frac{2x+4}{x^2+4x+5}-\frac{1}{x^2+4x+5}\right)dx=\ln(\sqrt{5})-\int_{-1}^1\frac{1}{x^2+4x+5}\,dx.$$
- On fait apparaître la forme canonique au dénominateur :
  $$I=\ln(\sqrt{5})-\int_{-1}^1\frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx.$$
- On fait apparaître la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$, en posant $u(x)=x+2$.

  Ainsi $\boxed{I=\ln(\sqrt{5})-[\arctan(x+2)]_{-1}^1=\ln(\sqrt{5})+\dfrac{\pi}{4}-\arctan(3)}$.

2.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{2x+1}{2x-x^2-4}$ est continue sur $[0,2]$ comme quotient de fonctions polynomiales et car $\Delta=-12<0$ donc le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. Ainsi I existe.
- On applique alors la méthode suivante.

  ◇ On fait apparaître $\dfrac{u'}{u}$:
  $$I=\int_0^2\left(-\frac{-2x+2}{-x^2+2x-4}+\frac{3}{-x^2+2x-4}\right)dx=0-3\int_0^2\frac{1}{x^2-2x+4}\,dx.$$
  ◇ On fait apparaître la forme canonique au dénominateur :

$$I = -3\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2+3}\,dx.$$

◇ On fait apparaître la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$:

$$I = -\int_0^2 \frac{1}{(\frac{x-1}{\sqrt{3}})^2+1}\,dx = -\sqrt{3}\int_0^2 \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{(\frac{x-1}{\sqrt{3}})^2+1}\,dx$$
$$= -\sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^2 = \boxed{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}.$$

Solution (exercice 11) Énoncé

1. La fonction f est continue sur $[a,b]$ par hypothèse et ainsi les fonctions $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto f(a+b-x)$ sont elles aussi continues sur $[a,b]$ comme composé de fonctions continues pour la deuxième. Ainsi les deux intégrales existent bien.
Partons par exemple de $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,dx$ et vérifions en faisant un changement de variable que cette intégrale vaut bien $\displaystyle\int_a^b f(y)\,dy$.
On pose $y = a+b-x$, $dy = -dx$, donc $f(a+b-x)\,dx = -f(y)\,dy$. Et $x = a \implies y = b$, et $x = b \implies y = a$, la fonction $\varphi : x \longmapsto a+b-x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ comme fonction usuelle. Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_b^a (-f(y))\,dy = \boxed{\int_a^b f(y)\,dy}.$$
On obtient bien le résultat cherché.
2. La fonction $x \longmapsto \dfrac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ est bien continue sur $[0,\pi]$ comme composé, somme, produit et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ existe bien et on est bien sous l'hypothèse du résultat de la question précédente. Ainsi, on obtient en utilisant la question précédente que :
$$I = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\,dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx = \pi\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx - i$$
en utilisant le cercle trigonométrique. Ainsi, on a : $2i = \pi\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$ et on reconnaît alors une primitive usuelle et on obtient donc :
$$2i = -\pi\left[\arctan(\cos(x))\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Ainsi, on vient de montrer que $\boxed{I = \dfrac{\pi^2}{4}}$.

Solution (exercice 1) Énoncé On rappelle que les primitives sont toutes définies à une constante près. Ici je ne fais pas apparaître les constantes que je prends toujours égales à 0.

1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \dfrac{\sin(3x)}{3}}$: Primitive usuelle.
2. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \dfrac{\sin(3x)}{12} + \dfrac{3}{4}\sin x = \sin(x) - \dfrac{\sin^3(x)}{3}}$: Linéarisation ou utilisation du fait que la puissance est impaire pour faire apparaître la forme $u'u^2$.
3. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \dfrac{\sin^5(x)}{5}}$: Reconnaître la forme $u'u^4$.
4. La fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \middle|\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Il existe donc par exemple F une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ (par exemple) : $\boxed{F(x) = \dfrac{1}{\cos x}}$: on reconnaît une primitive de la forme $-\dfrac{u'}{u^2}$.
5. La fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \middle|\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Il existe donc par exemple F une primitive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ (par exemple) : $\boxed{F(x) = -\ln|\cos x| = -\ln(\cos x)}$: on reconnaît une primitive de la forme $-\dfrac{u'}{u}$.
6. La fonction est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$. Il existe donc F une primitive sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x \in]1,+\infty[$ (par exemple) : $\boxed{F(x) = \ln|\ln x| = \ln(\ln x)}$: on reconnaît une primitive de la forme $\dfrac{u'}{u}$.
7. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car $1+x^2 > 0$. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = \sqrt{1+x^2}}$: on reconnaît une primitive de la forme $\dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.
8. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur est non nul comme somme de deux termes strictements positifs. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{F(x) = x - \ln\left|e^x+1\right| = x - \ln(e^x+1)}$: On utilise l'astuce $1 = 1 + e^x - e^x$ puis on coupe en deux et on reconnaît sur l'un des

deux bouts : $\frac{u'}{u}$.

9. La fonction est continue sur $]1,+\infty[$. Il existe donc F une primitive sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x\in]1,+\infty[$: $\boxed{F(x)=2\sqrt{x-1}}$: on reconnaît la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

10. La fonction est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-3,1\}$. Il existe donc par exemple F une primitive sur $]-3,1[$ et pour tout $x\in]-3,1[$ (par exemple) : $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-3\right|=-\ln\left(-x^2-2x+3\right)}$: on reconnaît une primitive de la forme $\frac{1}{2}\frac{u'}{u}$.

11. * La fonction est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0,4\}$. Il existe donc F une primitive sur par exemple $]-\infty,0[$ et pour tout $x\in]-\infty,0[$: $\boxed{F(x)=3\ln|x|+2\ln|x-4|=3\ln(-x)+2\ln(4-x)}$: on commence par chercher $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\frac{5x-12}{x(x-4)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-4}$.

Solution (exercice 2) Énoncé

1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur est non nul comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{F(x)=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}$: on reconnaît une primitive de la forme $\frac{u'}{1+u^2}$ en mettant le 3 en facteur au dénominateur.
2. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur ne s'annule pas comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{F(x)=\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x}{4}\right)}$: on reconnaît la forme $\frac{u'}{1+u^2}$ après avoir mis 16 en facteur au dénominateur.
3. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur ne s'annule pas comme somme de deux termes strictement positifs. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{F(x)=\arctan(e^x)}$: on reconnaît la forme $\frac{u'}{1+u^2}$.
4. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ car son dénominateur est non nul comme somme de deux termes positifs dont l'un est strictement positif. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\boxed{F(x)=\arctan(\sin x)}$: on reconnaît une primitive de la forme $\frac{u'}{1+u^2}$.
5. La fonction est continue sur $]0,+\infty[$. Il existe donc F une primitive sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x\in]0,+\infty[$: $\boxed{F(x)=2\arctan\left(\sqrt{x}\right)}$: on reconnaît la forme $\frac{u'}{1+u^2}$ en écrivant que : $x=\left(\sqrt{x}\right)^2$ et en remarquant que la dérivé de la racine carré est bien $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
6. La fonction est continue sur $]-\infty,2\ln 2[$ car : $4-e^x>0\iff 2\ln 2>x$. Il existe donc F une primitive sur $]-\infty,2\ln 2[$ et pour tout $x\in]-\infty,2\ln 2[$: $\boxed{F(x)=-2\sqrt{4-e^x}}$: on reconnaît la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

Solution (exercice 3) Énoncé

1. On reconnaît la forme $\frac{u'}{u}$ (à constante près) :

$$\begin{aligned}\int_2^3\frac{1}{1-x}\,dx&=-\int_2^3\frac{-1}{1-x}\,dx\\&=\left[-\ln(|1-x|)\right]_2^3\\&=\ln(|1-2|)-\ln(|1-3|)\\&=\ln(1)-\ln(2)\\&=\boxed{-\ln(2)}\end{aligned}$$

2. On reconnaît la forme $-\frac{u'}{u^2}$ et ainsi :

$$\begin{aligned}\int_2^3\frac{1}{(1-x)^2}\,dx&=\left[\frac{1}{1-x}\right]_2^3\\&=\frac{1}{1-3}-\frac{1}{1-2}\\&=-\frac{1}{2}+1\\&=\boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

3. On utilise la relation de de Chasles pour couper en deux l'intégrale et ainsi pouvoir enlever la valeur absolue, sachant que sur l'intervalle $[0,\pi]$, on a :

$$\cos(x)\geq 0\iff x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}|\cos(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &=[\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}-[\sin(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\ &=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(0)-\sin(\pi)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &=1-0-0+1\\ &=\boxed{2}.\end{aligned}$$

4. On reconnaît la forme $u'u$ et ainsi :

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^2\\ &=\boxed{\frac{(\ln 2)^2}{2}}\end{aligned}$$

5. Soit $t\in[0,1]$, on a : $\quad t^2 2^{t^3}=t^2\mathrm{e}^{t^3\ln(2)}$.
On reconnaît alors la forme $u'\mathrm{e}^u$ (à constante près) et :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^2 2^{t^3}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 t^2\mathrm{e}^{t^3\ln(2)}\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{3\ln(2)}\int_0^1(3t^2\ln(2))\mathrm{e}^{t^3\ln(2)}\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{3\ln(2)}\left[\mathrm{e}^{t^3\ln(2)}\right]_0^1\\ &=\frac{1}{3\ln(2)}\left(\mathrm{e}^{\ln(2)}-1\right)\\ &=\boxed{\frac{1}{3\ln(2)}}\end{aligned}$$

6. En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3\max(2,x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^2 2\,\mathrm{d}x+\int_2^3 x\,\mathrm{d}x\\ &=(2-(-1))\times 2+\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3\\ &=6+\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\\ &=\frac{12+9-4}{2}\\ &=\boxed{\frac{17}{2}}\end{aligned}$$

7. Ici, l'intégrande ne s'intègre pas à vue d'oeil. On utilise une petite astuce "$-1+1$" et on obtient que :

$$\frac{x^2}{1+x}=\frac{x^2-1+1}{1+x}=\frac{(x-1)(x+1)+1}{1+x}x-1+\frac{1}{1+x}.$$

Une primitive est alors $\mathrm{F}(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+\ln|1+x|$ et on obtient après calculs :

$$\boxed{\mathrm{I}=-\frac{1}{2}+\ln(2)}.$$

Solution (exercice 4) Énoncé

1. Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto\sin(x)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}x\cos(x)\,\mathrm{d}x &= [x\sin(x)]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &=[\cos(x)]_0^{\pi}\\ &=\cos(\pi)-\cos(0)\\ &=-1-1\\ &=\boxed{-2}\end{aligned}$$

2. Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[x\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}\right]_0^1\\ &=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2-\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2-1)\\ &=\frac{2\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2+1}{4}\\ &=\boxed{\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}}\end{aligned}$$

3. Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto-\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, par intégration par parties :

$$\int_0^1 x(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \left[-x\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}$$

4. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ et $x \mapsto \ln(x)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,t]$ (ou sur $[t,1]$), par intégration par parties,

$$\int_1^t x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln(x)\right]_1^t - \int_1^t \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{t^{n+1}\ln t}{n+1} - \int_1^t \frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{t^{n+1}\ln t}{n+1} - \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^t = \boxed{\frac{t^{n+1}\ln t}{n+1} - \frac{t^{n+1}-1}{(n+1)^2}}$$

Solution (exercice 5) Énoncé Dans tous ces exemples, on ne peut pas calculer directement une primitive... L'idé alors d'exprimer cette primitive sous la forme d'une intégrale pour pouvoir la calculer plus facilement. On ne détaille pas tous les calculs, seulement des indications pour guider l'intégration par parties.

1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \int_0^x t^3\cos(6t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^3\sin(6x)}{6} + \frac{x^2\cos(6x)}{12} - \frac{x\sin(6x)}{36} - \frac{\cos(6x)}{6^3}}.$$
Trois intégration par parties en dérivant le polynôme.
2. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ donc il existe F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}\int_0^x t\cos(2t)\,\mathrm{d}t + \frac{x^2}{4} = \frac{x\sin(2x)}{4} + \frac{\cos(2x)}{8} + \frac{x^2}{4}}.$$
Linéarisation du cosinus carré puis une intégration par parties.
3. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}.$$
1 intégration par parties en dérivant la fonction arctangente et en intégrant 1 puis on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$.
4. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x}.}$$
2 intégration par parties en dérivant le polynôme.
5. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$. Il existe donc F une primitive sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{\mathrm{F}(x) = \int_0^x t^3\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{(x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2}}{2}}.$$
1 intégration par parties en dérivant le polynôme $t \longmapsto t^2$ et en intégrant $t \longmapsto t e^{-t^2}$ où on reconnaît $u'\mathrm{e}^u$ (ici on commence par écrire que $t^3 = t^2 \times t$). Puis dans la nouvelle intégrale de l'intégration par parties, on reconnaît encore la forme $u'\mathrm{e}^u$.

Solution (exercice 6) Énoncé
1. Notons I l'intégrale à calculer. Calculons I grâce à un changement de variable : on pose $u = \tan x$, $\mathrm{d}u = (1+\tan^2(x))\,\mathrm{d}x =$.
Lorsque $x = 0$, $u = 0$ et lorsque $x = \dfrac{\pi}{4}$, $u = 1$. De plus $\varphi : x \longmapsto \tan(x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x) + \tan^3(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)(1+\tan^2(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$
2. Posons $x = \mathrm{e}^t$ de sorte que $\mathrm{d}x = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$. Lorsque $t = 0$, alors $x = 1$ et lorsque $t = 1$, alors $x = \mathrm{e}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$, d'après le théorème de changement de variables,
$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan(x)]_1^{\mathrm{e}} = \boxed{\arctan(\mathrm{e}) - \frac{\pi}{4}}.$$

3. Posons $x=\dfrac{1}{t}$ de sorte que $\mathrm{d}x=-\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$. Si $x=1$, alors $t=1$ et si $x=\mathrm{e}$, alors $t=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right]$, par le théorème de changement de variables,

$$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{\cancel{t^2}}}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{\cancel{t^2}}\right)=\int_1^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\ln(t)\,\mathrm{d}t$$

Cette dernière intégrale se calcule par intégration par parties. Les fonctions $t\mapsto t$ et $t\mapsto\ln(t)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right]$,

$$\begin{aligned}\int_1^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\ln(t)\,\mathrm{d}t&=[t\ln(t)]_1^{\frac{1}{\mathrm{e}}}-\int_1^{\frac{1}{\mathrm{e}}}t\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{\mathrm{e}}-\int_1^{\frac{1}{\mathrm{e}}}1\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{\mathrm{e}}-\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right)\\&=1-\frac{2}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x=1-\frac{2}{\mathrm{e}}}$

4. Faisons le changement $x=\tan t$, $\mathrm{d}x=\left(1+\tan^2(t)\right)\mathrm{d}t$.
Comme la fonction tan est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, par le théorème de changement de variables : $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(1+\tan^2(t)\right)\mathrm{d}t}{(1+\tan^2(t))^{3/2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\tan^2(t)}}$.
Mais comme $1+\tan^2=\dfrac{1}{\cos^2}$, on a $\sqrt{1+\tan^2}=\dfrac{1}{|\cos t|}$. Donc puisque cos est positive sur $[0,\pi/4]$, on a :

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,\mathrm{d}t=[\sin t]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

5. Dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\cos x)^n\,\mathrm{d}x$, considérons le changement de variable affine $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ (si le changement de variable est affine, pas besoin de justifier le caractère $\mathscr{C}^1$ mais si on devait le justifier, il faut dire que la fonction $t\mapsto\dfrac{\pi}{2}-t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$), de sorte que $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. On a alors :

$$\int_0^{\pi/2}(\cos x)^n\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)^n(-\mathrm{d}t)=\boxed{\int_0^{\pi/2}(\sin t)^n\mathrm{d}t}$$

Solution (exercice 7) Énoncé **Calculer $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow1}\frac{1}{x-1}\int_1^x\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.**

- On pose $f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $x\longmapsto1$ et $x\longmapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction $t\longmapsto\dfrac{t^2}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a bien que la fonction f est continue sur $[1,x]$.
- On pose de plus la fonction $g:t\longmapsto\dfrac{t^2}{1+t^2}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions continues et ainsi elle admet bien une primitive G sur $\mathbb{R}$, primitive qui est alors de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a alors pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=\mathrm{G}(x)-\mathrm{G}(1)$.
- On pose alors pour tout $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{1\}$: $h(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$. On remarque alors que l'on a pour tout $x\in\mathbb{R}\smallsetminus\{1\}$: $h(x)=\dfrac{\mathrm{G}(x)-\mathrm{G}(1)}{x-1}$ ce qui correspond au taux d'accroissement de la fonction G en 1.
- Pour calculer la limite de h en 1, il faut donc étudier la dérivabilité de la fonction G en 1. Or la fonction G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et ainsi elle est en particulier dérivable en 1. Ainsi la limite de h en 1 existe et vaut $\mathrm{G}'(1)=g(1)=\dfrac{1}{2}$. Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\longrightarrow1}h(x)=\frac{1}{2}}$.

Solution (exercice 8) Énoncé

1. - Existence : la fonction $x\longmapsto\dfrac{x}{1+x^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.
   - Calcul de F grâce à un changement de variable :
     - ◇ On pose : $\left\{\begin{aligned}u&=t^2\\\mathrm{d}u&=2t\,\mathrm{d}t\\\frac{t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t&=\frac{\mathrm{d}u}{2(1+u^2)}\end{aligned}\right.$.
     - ◇ On a $t=0\implies u=0$, et $t=x\implies u=x^2$.
     - ◇ On a :
       - $\varphi:t\longmapsto t^2$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.

– $u \longmapsto \dfrac{1}{2(1+u^2)}$ est continue sur $[0,x^2]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
$$\boxed{\mathrm{F}(x)=\int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}u}{2(1+u^2)}=\frac{\arctan\left(x^2\right)}{2}}.$$

2. • Existence : la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2+\sqrt{x}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme somme et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}^+$ et : $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{2+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

• Calcul de F grâce à un changement de variable :

◇ On pose : $\left\{\begin{array}{rcl} u &=& 2+\sqrt{t}\\ \mathrm{d}u &=& \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} \iff 2(u-2)\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}t\left(\text{car}\sqrt{t}=u-2\right)\dfrac{1}{2+\sqrt{t}}\\ \mathrm{d}t &=& \dfrac{2(u-2)}{u}\,\mathrm{d}u.\end{array}\right.$

◇ On a $t=0 \Longrightarrow u=2$, et $t=x \Longrightarrow u=2+\sqrt{x}$.

◇ On a :
– $\varphi : t \longmapsto 2+\sqrt{t}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
– $u \longmapsto \dfrac{2(u-2)}{u}$ est continue sur $[2,2+\sqrt{x}]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
$$\boxed{\mathrm{F}(x)=2\int_2^{2+\sqrt{x}}\left(1-\frac{2}{u}\right)\mathrm{d}u=2\sqrt{x}-4\ln\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}.$$

3. • Existence : la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}\sin\left(\mathrm{e}^x\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composé et produit de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{2t}\sin\left(\mathrm{e}^t\right)\mathrm{d}t$.

• Calcul de F grâce à un changement de variable :

◇ On pose : $\left\{\begin{array}{rcl} u &=& \mathrm{e}^t\\ \mathrm{d}u &=& \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\\ \mathrm{e}^{2t}\sin\left(\mathrm{e}^t\right)\mathrm{d}t &=& u\sin(u)\,\mathrm{d}u.\end{array}\right.$

◇ On a $t=0 \Longrightarrow u=1$, et $t=x \Longrightarrow u=\mathrm{e}^x$.

◇ On a :
– $\varphi : t \longmapsto \mathrm{e}^t$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
– $u \longmapsto u\sin(u)$ est continue sur $[1,e^x]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
$$\boxed{\mathrm{F}(x)=\int_1^{\mathrm{e}^x} u\sin u\,\mathrm{d}u=-x\cos x+\sin x+\cos(1)-\sin(1)},$$
en faisant une intégration par parties.

4. • Existence : la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme composé et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}^+$ et : $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

• Calcul de F grâce à un changement de variable :

◇ On pose : $\left\{\begin{array}{rcl} u &=& \sqrt{t}\\ \mathrm{d}u &=& \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}\\ \dfrac{\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t &=& \dfrac{2u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.\end{array}\right.$

◇ On a $t=0 \Longrightarrow u=0$, et $t=x \Longrightarrow u=\sqrt{x}$.

◇ On a :
– $\varphi : t \longmapsto \sqrt{t}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
– $t \longmapsto \dfrac{2u^2}{1+u^2}$ est continue sur $[0,\sqrt{x}]$ comme somme et quotient de fonctions continues.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
$$\boxed{\mathrm{F}(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\frac{2u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}t=2\left(\sqrt{x}-\arctan\left(\sqrt{x}\right)\right)},$$
en utilisant l'astuce $u^2=1+u^2-1$.

5. • Existence : la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^4(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}\smallsetminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \;\middle|\; k\in\mathbb{Z}\right\}$ comme composé et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur par exemple l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et : $\forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{\cos^4(t)}\,\mathrm{d}t$.

• Calcul de F grâce à un changement de variable :

◇ On pose : $\left\{\begin{array}{rcl} u &=& \tan(t)\\ \mathrm{d}u &=& \dfrac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)}\\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\cos^4(t)} &=& (1+u^2)\,\mathrm{d}u.\end{array}\right.$

◇ On a $t=0 \Longrightarrow u=0$, et $t=x \Longrightarrow u=\tan x$.

◇ On a :

- $\varphi : t \longmapsto \tan(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
- $u \longmapsto 1+u^2$ est continue sur $[0,\tan(x)]$.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(x) = \int_0^{\tan(x)} (1+u^2)\,du = \tan(x) + \frac{1}{3}\tan^3(x)}.$$

6. • Existence : la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{\sin(x)}}{\cos(x)}$ est continue sur par exemple $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ comme composé et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et : $\forall X \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sqrt{\sin(t)}}{\cos(t)}\,dt$.

• Calcul de F grâce à un changement de variable :

◇ On pose : $\begin{cases} u = \sqrt{\sin(t)} \\ du = \dfrac{\cos(t)\,dt}{2\sqrt{\sin(t)}} \\ \dfrac{\sqrt{\sin(t)}}{\cos(t)}\,dt = \dfrac{2\sin(t)}{\cos^2(t)}\dfrac{\cos(t)}{2\sqrt{\sin(t)}}\,dt \\ \qquad = \dfrac{2\sin(t)}{1-\sin^2(t)}\dfrac{\cos(t)}{2\sqrt{\sin(t)}}\,dt = \dfrac{2u^2}{1-u^4}\,du. \end{cases}$

◇ On a $t=0 \implies u=0$, et $t=x \implies u=\sqrt{\sin(x)}$.

◇ On a :

- $\varphi : t \longmapsto \sqrt{\sin(t)}$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
- $u \longmapsto \dfrac{2u^2}{1-u^4}$ est continue sur $[0,\sqrt{\sin(x)}]$.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(x) = \int_0^{\sqrt{\sin(x)}} \frac{2u^2}{1-u^4}\,du = -\arctan(\sqrt{\sin x}) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{\sin(x)}}{1+\sqrt{\sin(x)}}\right)},$$

en écrivant que $\dfrac{u^2}{1-u^4} = \dfrac{A}{1-u^2} + \dfrac{B}{1+u^2} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1-u^2} - \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{1+u^2}$ puis en écrivant encore $\dfrac{1}{1-u^2} = \dfrac{C}{1-u} + \dfrac{D}{1+u}$.

7. • Existence : la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composé, somme et quotient de fonctions continues. Donc il existe une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{e^t+e^{-t}}\,dt$.

• Calcul de F grâce à un changement de variable :

◇ On pose : $\begin{cases} u = e^t \\ du = e^t\,dt \\ \dfrac{1}{e^t+e^{-t}}\,dt = \dfrac{du}{1+u^2}. \end{cases}$

◇ On a $t=0 \implies u=1$, et $t=x \implies u=e^x$.

◇ On a :

- $\varphi : t \longmapsto e^t$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,x]$ comme fonction usuelle.
- $u \longmapsto \dfrac{1}{1+u^2}$ est continue sur $[1,e^x]$.

Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$\boxed{F(x) = \int_1^{e^x} \frac{du}{1+u^2} = \arctan(e^x) - \frac{\pi}{4}}.$$

Solution (exercice 9)

Énoncé

1. • La fonction $x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ (discriminant strictement négatif). Ainsi I existe.

• On reconnaît une forme $\dfrac{u'}{u}$ en posant $u(x) = x^2+x+1$.

• Calcul : $\boxed{I = \left[\ln\left|x^2+x+1\right|\right]_0^1 = \ln(3)}$.

2. • La fonction $x \longmapsto \dfrac{x+3}{x^2-1}$ est continue sur $[2,3]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $[2,3]$ (les racines étant 1 et -1). Ainsi I existe.

• On cherche A et B réls tels que : $\dfrac{x+3}{x^2-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$.

• Calcul : $\boxed{I = [2\ln(|x-1|) - \ln(|x+1|)]_2^3 = \ln 3}$.

3. • La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}$ est continue sur $[0,\ln 2]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$ comme somme de trois termes strictement positifs. Ainsi I existe.

• On commence par faire un changement de variable : $u = e^x$, $du = e^x\,dx$, $\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx = \dfrac{u}{u^2+3u+2}\,du$. On a $x=0 \implies u=1$, et $x=\ln 2 \implies u=2$. La fonction $\varphi : x \longmapsto e^x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\ln 2]$ comme fonction usuelle. Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :

$$I = \int_1^2 \frac{u}{u^2+3u+2}\,du.$$

• On calcule I à présent. On a $\Delta = 1 > 0$ et les deux racines sont : -2 et -1 et

ainsi on cherche deux réls A et B tels que :
$$\frac{u}{u^2+3u+2} = \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u+1}.$$
On obtient que : $\dfrac{u}{u^2+3u+2} = \dfrac{2}{u+2} - \dfrac{1}{u+1}$

- Ainsi, on a : $\boxed{I = 5\ln(2) - 3\ln(3)}$.

4. - La fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi I existe bien.
- ◇ On utilise l'astuce du $+1-1$: $\dfrac{x}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

  ◇ Ainsi, on a : $\boxed{I = \left[\ln|x+1| + \dfrac{1}{x+1}\right]_0^1 = \ln(2) - \dfrac{1}{2}}$.

Solution (exercice 10) Énoncé

1. Les égalités sur les fractions se prouvent simplement par calculs directs. Passons au calcul des intégrales.

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x^2+4x+5}$ est continue sur $[-1,1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas (discriminant négatif). Ainsi I existe bien.
- On fait apparaître $\dfrac{u'}{u}$:
$$I = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} \times \frac{2x+4}{x^2+4x+5} - \frac{1}{x^2+4x+5}\right) dx = \ln(\sqrt{5}) - \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+4x+5} dx.$$
- On fait apparaître la forme canonique au dénominateur :
$$I = \ln(\sqrt{5}) - \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x+2)^2+1} dx.$$
- On fait apparaître la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$, en posant $u(x) = x+2$.

  Ainsi $\boxed{I = \ln(\sqrt{5}) - [\arctan(x+2)]_{-1}^{1} = \ln(\sqrt{5}) + \dfrac{\pi}{4} - \arctan(3)}$.

2. - La fonction $x \longmapsto \dfrac{2x+1}{2x-x^2-4}$ est continue sur $[0,2]$ comme quotient de fonctions polynomiales et car $\Delta = -12 < 0$ donc le dénominateur ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$. Ainsi I existe.
- On applique alors la méthode suivante.

  ◇ On fait apparaître $\dfrac{u'}{u}$:
$$I = \int_0^2 \left(-\frac{-2x+2}{-x^2+2x-4} + \frac{3}{-x^2+2x-4}\right) dx = 0 - 3\int_0^2 \frac{1}{x^2-2x+4} dx.$$
  ◇ On fait apparaître la forme canonique au dénominateur :
$$I = -3\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2+3} dx.$$
  ◇ On fait apparaître la forme $\dfrac{u'}{1+u^2}$:
$$I = -\int_0^2 \frac{1}{(\frac{x-1}{\sqrt{3}})^2+1} dx = -\sqrt{3}\int_0^2 \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{(\frac{x-1}{\sqrt{3}})^2+1} dx$$
$$= -\sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^2 = \boxed{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}}.$$

Solution (exercice 11) Énoncé

1. La fonction f est continue sur $[a,b]$ par hypothèse et ainsi les fonctions $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto f(a+b-x)$ sont elles aussi continues sur $[a,b]$ comme composé de fonctions continues pour la deuxième. Ainsi les deux intégrales existent bien.

Partons par exemple de $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,dx$ et vérifions en faisant un changement de variable que cette intégrale vaut bien $\displaystyle\int_a^b f(y)\,dy$.

On pose $y = a+b-x$, $dy = -dx$, donc $f(a+b-x)\,dx = -f(y)\,dy$. Et $x = a \implies y = b$, et $x = b \implies y = a$, la fonction $\varphi : x \longmapsto a+b-x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ comme fonction usuelle. Ainsi d'après le théorème de changement de variable, on obtient que :
$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_b^a (-f(y))\,dy = \boxed{\int_a^b f(y)\,dy}.$$
On obtient bien le résultat cherché.

2. La fonction $x \longmapsto \dfrac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$ est bien continue sur $[0,\pi]$ comme composé, somme, produit et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} dx$ existe bien et on est bien sous l'hypothèse du résultat de la question précédente. Ainsi, on obtient en utilisant la question précédente que :
$$I = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)} dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx = \pi\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx - i$$
en utilisant le cercle trigonométrique. Ainsi, on a : $2i = \pi\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx$ et on reconnaît alors une primitive usuelle et on obtient donc :
$$2i = -\pi[\arctan(\cos(x))]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Ainsi, on vient de montrer que $\boxed{I = \frac{\pi^2}{4}}$.