Chapitre # (AN) 5 — Suites : généralités et comportement asymptotique

Résumé & Plan

Ce chapitre vise à renforcer l'étude des suites amorcée au lycée. Nous verrons notamment les définitions de convergence/divergence d'une suite, ainsi que les théorèmes généraux permettant d'étudier la nature d'une suite. On poursuit par l'étude de certaines suites particulières : les suites implicites et les suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. On introduit enfin la notion de suites équivalentes, qui permettra notamment de lever efficacement certaines formes indéterminées dans des calculs de limites.

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Si l'on considère les suites récurrentes de moyenne arihmétique et géométrique, i.e.

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_n + y_n},$$

alors :

$$x_n \left(et\, y_n\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\pi}{4}(x_0 + y_0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \left(\frac{x_0 - y_0}{x_0 + y_0}\right)^2 \sin^2(\theta)\right]^{-\frac{1}{2}} d\theta.$$

— Le saviez-vous ?

1. GÉNÉRALITÉS

1.1. Définitions

Définition 1 | Suite réelle

Une *suite réelle* est une application de $[\![n_0\,,+\infty[\![$, pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, dans $\mathbb{R}$:

$$u \left| \begin{array}{ccc} [\![n_0\,,+\infty[\![& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}\right.$$

- La suite $u : [\![n_0\,,+\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$ est notée $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.
- la valeur u_{n_0} est appelé le *premier terme de la suite.*
- Pour tout entier $n \geq n_0$, u_n est *le terme de rang* n de la suite.

La plupart du temps, nous aurons $n_0 = 0$ ou éventuellement 1.

Notation — Abus de ...

Parfois on notera seulement (u_n) au lieu de $(u_n)_{n\geqslant n_0}$. Cela signifiera donc implicitement que l'on considère le plus petit entier n_0 telle que l'expression u_n soit définie pour tout $n \geqslant n_0$.

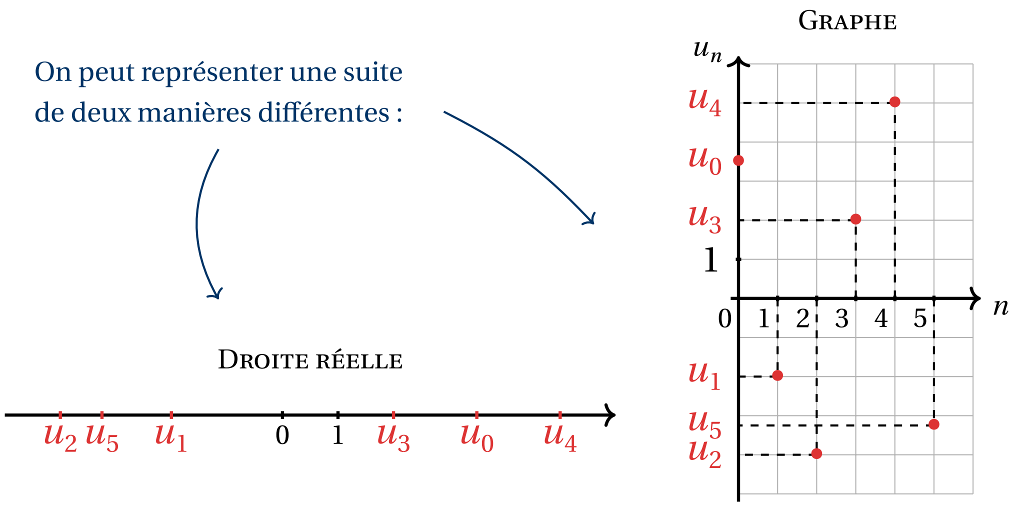
Notation

- L'ensemble des suites définies à partir de n_0 est $\mathbb{R}^{[\![n_0\,,+\infty[\![}$, notation déjà rencontrée pour les applications.
- Dans le cas $n_0 = 0$, on notera $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$.

Attention

De-même qu'il ne faut pas confondre une fonction f et l'image $f(x)$ de x par f, on prendra garde de bien distinguer la suite (u_n) de son terme général d'ordre n noté lui u_n sans parenthèse.

On peut représenter une suite de deux manières différentes :



Cadre

Dans la suite, afin de simplifier la présentation dans les définitions et les propositions, nous considérons (sauf exceptions), si cela n'est pas précisé, que les suites sont définies sur $\mathbb{N}$. Les définitions s'étendent en général sans problème pour des suites définies seulement à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle également de manière informelle qu'une suite peut être définie selon des modes différents :

- de façon *explicite*, *i.e.* on connaît le terme général de la suite en fonction de n, par exemple $u_n = 2^n - n^3$ pour tout entier naturel n (le calcul de u_n pour tout entier naturel n est « facile », il suffit de remplacer n par la valeur souhaitée),
- par *récurrence*, *i.e.* le terme u_{n+1} est défini en fonction des termes précédents, par exemple $u_{n+1} = \cos(u_n)$ pour tout entier naturel n (l'étude de la suite est alors plus délicate).

Exemple 1 (Calculs de remiers termes)

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{2u_n+1}$. Calculer u_1, u_2, u_3.

Définition 2 | Opérations

Pour tout $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit alors :

- **[Somme]** la suite $u+v$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\quad (u+v)_n = u_n + v_n$.
- **[Multiplication scalaire]** La suite λu par : $\forall n \in \mathbb{N},\quad (\lambda u)_n = \lambda u_n$.
- **[Produit]** La suite $u \times v$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\quad (u \times v)_n = u_n \times v_n$
- **[Quotient]** La suite $\dfrac{u}{v}$, si la suite v ne s'annule pas (c'est-à-dire $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), par : $\forall n \in \mathbb{N},\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

1.2. Suites bornées

Définition 3 | Borne

- Soient $m, \mathrm{M} \in \mathbb{R}$. On dit qu'une suite (u_n) est :
  - *majorée par* M si : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leqslant \mathrm{M}$,
  - *minorée par* m si : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geqslant m$.
- On dit qu'une suite (u_n) est :
  - *majorée* si : $\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leqslant \mathrm{M}$,
  - *minorée* si : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geqslant m$.
- Elle est dite *bornée* si elle est majorée et minorée.

Attention
Les minorants m et majorants M sont des quantités **indépendantes** de n.

Exemple 2 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^\star$ par $u_n = \dfrac{1}{n}$.

Proposition 1 | (u_n) bornée $\iff$ $(|u_n|)$ majorée.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite.
La suite (u_n) est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée, c'est-à-dire :

$$(u_n) \text{ est bornée } \iff \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant \mathrm{M}.$$

Dans la pratique, on utilise plutôt cette proposition pour montrer qu'une suite est bornée. La rédaction est souvent plus simple en exploitant les propriétés de la valeur absolue.

Preuve
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons la suite (u_n) bornée. Alors il existe $(m, \mathrm{M}) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}$. Alors on peut montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant \max(|m|, |\mathrm{M}|)$.
Donc la suite $(|u_n|)$ est majorée par $\max(|m|, |\mathrm{M}|)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Puisqu'on a l'inégalité $|u_n| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $-\mathrm{M} \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M}$ et on en déduit que (u_n) est bornée (car minorée par $-\mathrm{M}$ et majorée par M.

Exemple 3

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ est bornée car :

2. Les suites $\left(\dfrac{1}{n^2+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont bornées.

-
-

Corollaire 1 | Somme et produit de suites bornées
Soient (u_n) et (v_n) deux suites bornées. Alors, les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n \times v_n)$ sont bornées.

Preuve

Remarque 1 Si (u_n) et (v_n) sont majorées, a-t-on $(u_n + v_n)$ et $(u_n \times v_n)$ majorées ?

Définition 4 | à partir d'un certain rang

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{P}_n$ une propriété. On dit qu'elle est *vraie à partir d'un certain rang* s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\mathscr{P}_n$ soit vraie pour tout $n \geqslant n_0$.
- On notera aussi : « $\mathscr{P}_n$ est vraie APCR ».

Exemple 4 Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée à partir d'un certain rang si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ soit bornée.

Proposition 2 | Borné à partir d'un certain rang $\Longleftrightarrow$ Borné

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si elle est bornée à partir d'un certain rang.

Preuve

1. $\Longrightarrow$ évident (la suite est bornée à partir du rang 0).
2. $\Longleftarrow$

1.3. Suites monotones

Définition 5 | Monotonie d'une suite

- La suite (u_n) est dite **croissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geqslant u_n$.
  La suite (u_n) est dite **strictement croissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n$.
- La suite (u_n) est dite **décroissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n$.
  La suite (u_n) est dite **strictement décroissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n$.
- La suite (u_n) est dite **monotone** si elle est croissante ou décroissante.
  La suite (u_n) est dite **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- La suite (u_n) est dite **constante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n$.
  La suite (u_n) est dite **stationnaire** si elle est constante APCR, *i.e.* si :
  $$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad u_n = u_{n_0}.$$

Exemple 5 La suite $\left(3 + \left\lfloor \frac{4}{2^n} \right\rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. Expliciter l'entier n_0 de la définition précédente.

Méthode Trouver la monotonie d'une suite

- Pour étudier la monotonie d'une suite, la méthode la plus fréquente est de calculer $u_{n+1}-u_n$ et étudier son signe.
  - si $u_{n+1}-u_n \geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est croissante,
  - si $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors la suite (u_n) est décroissante.

  En outre, lorsque la suite (u_n) est définie par $u_n=f(n)$ (*i.e.* de façon explicite), le sens de variation de (u_n) est le même que celui de f sur $[0;+\infty[$.
- Si une suite (u_n) est à termes **strictement positifs**, elle est :
  - croissante si : $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1$,
  - décroissante si : $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant 1$.

  Ce critère est utile seulement si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ donne une expression simple (notamment en cas de présence de factorielles, de puissances...).

Exemple 6 (Suite explicite) Étudier, avec les deux méthodes, la monotonie de la suite (u_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\dfrac{2^n}{n+1}$.

-

-

Exemple 7 (Suite défiie par récurrence) La suite définie par $u_0=-2$ et pour tout $n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=u_n+\mathrm{e}^{-n}+1$ est monotone.

Par définition de suite (dé-)croissante, on obtient directement la proposition suivante (que vous pouvez utiliser sans justification).

Proposition 3 | Monotonie et majoration / minoration

- Une suite croissante est minorée (par son premier terme).
- Une suite décroissante est majorée (par son premier terme).

Preuve Par récurrence.

2. LIMITE D'UNE SUITE

2.1. Généralités

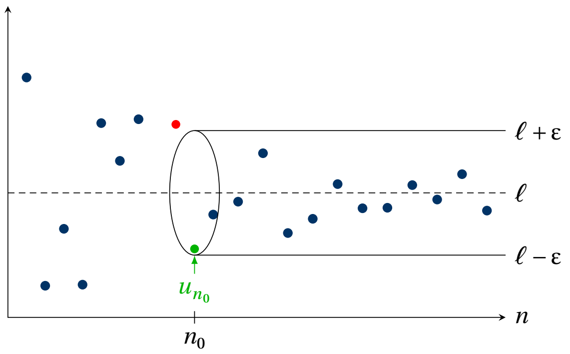
Soit (u_n) une suite réelle, et $\ell\in\mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ, ou a pour limite ℓ, lorsque :

« si petit $\varepsilon>0$ soit-il, l'intervalle $]\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang ».

Cela donne lieu formellement à la définition suivante.

Définition 6 | Convergence
Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite.
- On dit que (u_n) est *convergente de limite* ℓ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \ |u_n - \ell| < \varepsilon,$$
c'est-à-dire « si petit que soit $\varepsilon > 0$, u_n est dans l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, à partir d'un certain rang ».
- Le réel ℓ est appelé la *limite* de la suite (u_n). On note $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, ou encore $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.
- On dit que (u_n) est *convergente* s'il existe un réel ℓ tel que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

Cela signifie moralement que l'on est « aussi proche que l'on veut » de la limite ℓ, pourvu que n soit assez grand.



CONVERGENCE D'UNE SUITE VERS $\ell \in \mathbb{R}$. POUR TOUT $\varepsilon > 0$, IL EXISTE UN RANG n_0 À PARTIR DUQUEL LA DISTANCE ENTRE u_n ET ℓ EST INFÉRIEURE À ε.

Attention
- Ne pas parler de la limite d'une suite sans avoir justifié son existence.
- Une limite **ne** dépend **pas** de n.

Par définition de la limite, on a la propriété suivante.

Proposition 4 | Convergence et convergence vers zéro
Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite. Alors :
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \iff u_n - \ell \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Preuve On écrit pour chaque convergence la définition de la limite :
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \ |u_n - \ell| < \varepsilon$$
$$u_n - \ell \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \ |(u_n - \ell) - 0| < \varepsilon.$$
D'où l'équivalence.

Exemple 8 Montrons, avec la définition, que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Remarque 2 En pratique, on ne raisonnera **jamais** comme cela pour démontrer qu'une suite converge : on utilisera plutôt des opérations sur des limites connues ou des théorèmes de comparaison !

PROPRIÉTÉS DES SUITES CONVERGENTES. Les suites convergentes jouissent d'un certain nombre de propriétés à retenir.

Proposition 5 | Unicité de la limite
Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, sa limite est unique.

Preuve

Proposition 6 | Encadrement d'une suite convergente vers $\ell \neq 0$

Si (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad \frac{\ell}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3\ell}{2}.$$

En particulier, la suite (u_n) est strictement positive à partir d'un certain rang.

Cette propriété nous servira souvent quand nous parlerons des équivalences de suites.

Preuve

Proposition 7 | Une suite convergente est bornée

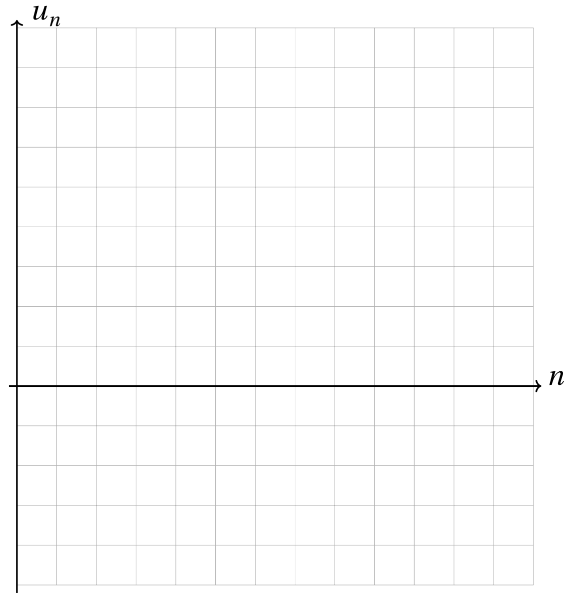
Toute suite convergente est bornée.

Preuve

Remarque 3 **(Suite convergente $\Longrightarrow$ suite bornée, la réciproque est fausse)**

- La réciproque de la proposition précédente est fausse, (nous verrons plus tard un contre-exemple, à savoir la suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ des puissances de -1). Il existe ainsi des suites bornées qui ne convergent pas.
- Par contraposée de la proposition, une suite non bornée ne converge pas.

Remarque 4 Si (u_n) et (v_n) sont deux suites égales à partir d'un certain rang, alors si l'une converge, l'autre aussi (vers la même limite).



2.2. Suites divergentes

Définition 7 | Suite divergente
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle.
Si (u_n) ne converge pas, on dit que (u_n) *diverge*, ou *est divergente*.

Définition 8 | Divergence vers $\pm\infty$, Divergence

- Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) *diverge vers* $+\infty$ et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si :
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0 \implies u_n > A,$$
i.e. « u_n est aussi grand que l'on veut, pourvu que n soit assez grand ».
- Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) *diverge vers* $-\infty$ et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si :
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0 \implies u_n < A,$$
i.e. « u_n est aussi petit que l'on veut, pourvu que n soit assez grand ».

Illustrons par exemple le cas d'une divergence vers $+\infty$.

Définition 9 | Nature
Déterminer la nature d'une suite c'est déterminer si elle converge ou diverge.

Attention **Diverger ne signifie pas tendre vers $\pm\infty$**
Il existe des suites qui ne convergent pas et qui ne divergent pas vers $\pm\infty$: ce sont celles n'ayant pas de limite. Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. *(Nous pourrons le montrer plus tard)*

Proposition 8 | Divergence vers $\pm\infty$, minoration et majoration

- Les suites qui divergent vers $+\infty$ sont minorées.
- Les suites qui divergent vers $-\infty$ sont majorées.

Preuve

- Soit (u_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 1$. Posons alors $m = \min\left(u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, 1\right)$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$ donc (u_n) est minorée.
- Soit (u_n) telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. Par définition, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant 1$. Posons alors $M = \max\left(u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}, 1\right)$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$ donc (u_n) est majorée.

OPÉRATIONS SUR LES LIMITES. Soient (u_n) et (v_n) deux suites admettant toutes les deux une limite en $+\infty$. Dans toute la suite, ℓ et ℓ' désignent deux nombres réels. « FI » désigne une indétermination du résultat de la limite indiqué dans le tableau (à traiter au cas par cas). Chaque résultat présent dans chaque case du tableau peut être démontré en vérifiant la définition de la limite, nous l'admettrons.

SOMME : ON ÉTUDIE $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(u_n+v_n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$						

PRODUIT : ON ÉTUDIE $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}(u_n v_n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)$									

QUOTIENT : ON ÉTUDIE $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Nous allons séparer l'étude de la limite du quotient de deux suites $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ en deux cas.

1^er^ cas. *Cas où la limite de* (v_n) *est non nulle.* Le tableau est le suivant :

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$							

2^nd^ cas. *Cas où la limite de* (v_n) *est nulle.* Le tableau est le suivant :

$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$					

Attention **Pour retenir, mais sans l'écrire**

- On pourra penser très fort, mais **sans jamais l'écrire sur une copie**, que :
$$\frac{1}{\infty}=0,\quad \frac{1}{0^+}=+\infty,\quad \frac{1}{0^-}=-\infty.$$
- On pourra penser très fort, mais **sans jamais l'écrire sur une copie**, que les formes indéterminées « FI » sont les suivantes :
$$\infty-\infty,\quad 0\times\infty,\quad \frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Tout cela avec des gros guillemets donc.

La plupart des techniques vues pour les fonctions sont utilisables pour les suites, dont celle de l'expression conjuguée. Voici quelques exemples.

Exemple 9 Calculer la limite des suites de terme général donné par :

- $u_n=n^2+2n-3$
- $v_n=-n^2+2n-3$
- $w_n=(3-5n)(n^3-4)$

- $x_n = \dfrac{2n+4}{\frac{1}{n}-5}$

- $y_n = \dfrac{2-5n}{4n+7}$

- $z_n = \dfrac{-3n^3-10n+4}{2n^2+3n+1}$

Exemple 10 Déterminer la limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Composition de limites avec des fonctions continues. On rappelle le théorème (vu en Terminale) permettant de « passer à la limite dans une fonction (continue) »

Théorème 1 | Limite d'une suite et fonction continue

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{R}$ une fonction. Si :
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathrm{I}$,
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$,
- f est continue en ℓ,

Alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$, ce qui peut s'écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)$$

Preuve Admis provisoirement (ce théorème sera revu dans un prochain chapitre, avec sa démonstration).

Exemple 11 Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

2.3. Limites et inégalités

Proposition 9 | Passage à la limite dans une inégalité

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \\ \displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell_2 \end{cases}$$

avec $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$. Alors : $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

Remarque 5 On peut aussi avoir $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang pour avoir le même résultat.

Preuve

Attention On ne $\boxed{\text{PASSE PAS}}$ à la limite dans une égalité $\boxed{\text{STRICTE}}$

Sans informations supplémentaires, on ne peut a priori pas avoir mieux qu'une inégalité large $\ell_1 \leqslant \ell_2$ dans la conclusion, même si l'on a une inégalité stricte du type : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$.

Considérer par exemple les suites u et v définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 3 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 3 + \frac{1}{n}$, pour lesquelles $u_n < v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$. La limite de la suite (u_n) n'est pas strictement supérieure à celle de la suite (v_n) !

Ainsi, si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 avec $u_n < v_n$ pour tout entier naturel n, on a : $\ell \boxed{\leqslant} \ell'$ et sans informations supplémentaires, on ne peut pas écrire d'inégalité stricte a priori.

Quand on passe à la limite dans une inégalité, les inégalités deviennent larges!

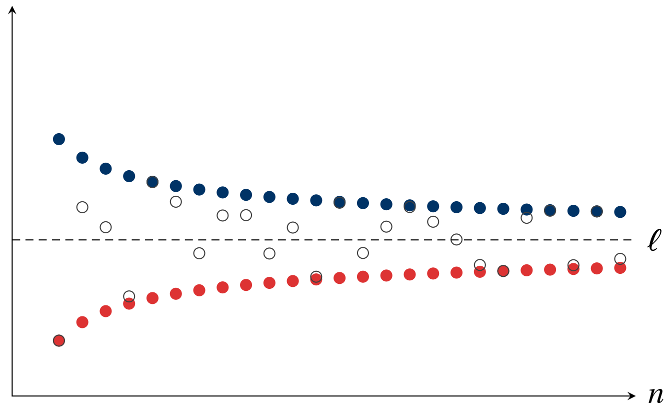
Remarque 6 Quitte à insister : **le caractère strict de l'inégalité est perdu par passage à la limite**. Lorsque l'on veut obtenir une inégalité stricte pour la limite, il faut utiliser un autre argument (en général la croissance ou décroissance de la suite, par exemple si : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > 1$, et que (u_n) est croissante et converge vers ℓ, alors : $\forall n \geqslant 0,\ u_n \geqslant u_0 > 1$, d'où, par passage à la limite, $\ell \geqslant u_0 > 1$, d'où finalement : $\ell > 1$ (l'idée est « d'intercaler » un terme de la suite, avant de passer à la limite).

Théorème 2 | Théorème d'encadrement (ou des gendarmes)

On considère (u_n), (v_n) et (w_n) telles que :

$$\begin{cases} \text{(i)} & u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \quad \text{(au moins APCR)},\\ \text{(ii)} & \text{les deux suites } (u_n) \text{ et } (w_n) \text{ convergent vers une même limite } \ell \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Alors : $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.



Preuve Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse sur (u_n) et (w_n), il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geqslant n_1 \implies \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon \quad \text{et} \quad n \geqslant n_2 \implies \ell - \varepsilon \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Par ailleurs, il existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_3$: $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Ainsi, en posant $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, on a pour tout $n \geqslant n_0$: $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant \ell + \varepsilon$. Ainsi, (v_n) converge vers ℓ.

Attention **(Bonne rédaction du théorème des gendarmes)**

Si (u_n), (v_n) et (w_n) vérifient : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ au moins à partir d'un certain rang, on n'écrira pas directement : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ si l'existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'est pas connue auparavant mais plutôt : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$ d'où : (u_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Remarque 7 Pour pouvoir appliquer le théorème des gendarmes, on utilisera par exemple : un encadrement de cos, de sin (on a , pour tout nombre réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$) ou de la partie entière $\lfloor x \rfloor$ (on sait que pour tout nombre réel x, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, en considérant l'inégalité de gauche, puis celle de droite, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$).

Exemple 12 Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ (où $\lfloor nx \rfloor$ désigne la partie entière de nx).

Remarque 8 **(Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)** On a obtenu : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$, tout nombre réel est donc limite d'une suite de nombres rationnels, on dit que $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$. La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est parfois utile pour généraliser sur $\mathbb{R}$ une propriété valable sur $\mathbb{Q}$.

Exemple 13 Étudier la nature de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^\star$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$.

Corollaire 2 | Conséquences du théorème des gendarmes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

1. Si : $\exists n_0 \in \mathbb{N},,\ \forall n \geqslant n_0\ |u_n| \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$,
   alors (u_n) converge et : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Si : $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0\ |u_n - \ell| \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$,
   alors (u_n) converge et : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
3. Le produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers zéro est une suite convergeant vers zéro.

Preuve

1.

2.

3. Soit (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite de limite nulle.

Exemple 14 Nature de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^\star$ par $u_n = \dfrac{\cos(n^2)+2+(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Théorème 3 | Théorème de divergence par minoration

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

1. $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang,

2. $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Alors : $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Preuve Soit $A \in \mathbb{R}$. Alors $u_n \geqslant A$ à partir d'un certain rang n_1. Comme $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang n_2, alors $A \leqslant v_n$ à partir du rang $\max\{n_1, n_2\}$, d'où la conclusion.

Corollaire 3 | Théorème de divergence par majoration

On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

1. $u_n \leqslant v_n$ au moins à partir d'un certain rang,

2. $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Preuve Utiliser le même type de démonstration que dans le théorème précédent, ou utiliser directement le théorème précédent de divergence par minoration aux suites $(-v_n)$ et $(-u_n)$.

Exemple 15 Étudier la nature de la suite (u_n), où $u_n = n + \cos n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 16 **(Divergence de la série harmonique (1))** Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on note :

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$.

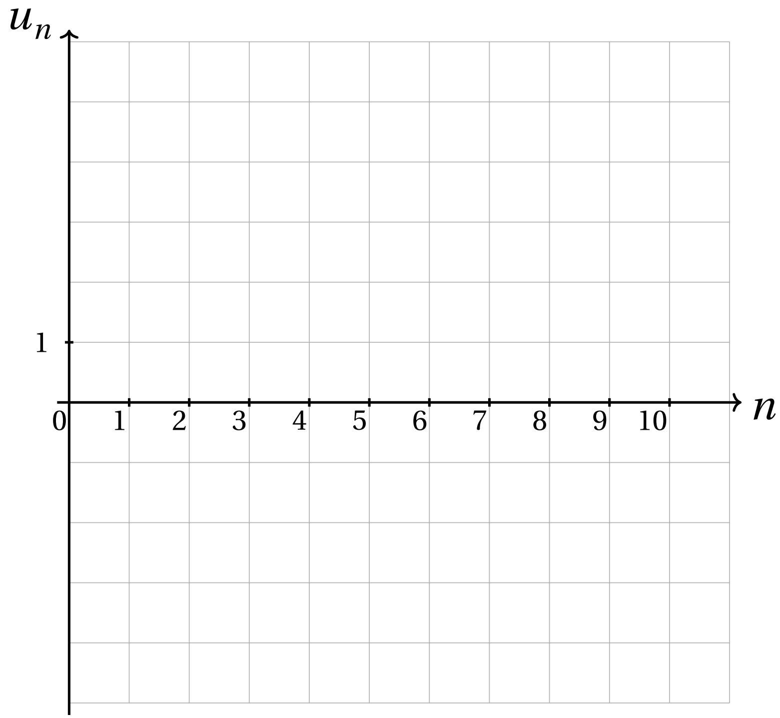
3. En déduire que $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2.4. Suites extraites

Définition 10 | Suite extraite de rangs pairs, suite extraite de rangs impairs

Soit (u_n) une suite. On définit :

- La suite extraite (v_n) des indices pairs : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{2n}$. On la note (u_{2n}).
- La suite extraite (w_n) des indices impairs : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_{2n+1}$. On la note (u_{2n+1})



Remarque 9 Plus généralement, on appelle **suite extraite (ou sous-suite)** de la suite (u_n) toute suite (v_n) telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (par exemple, pour la suite de rangs pairs, la fonction φ est définie sur $\mathbb{N}$ par $\varphi(n) = 2n$).

Théorème 4 | Convergence des suites extraites

Soit une suite (u_n) et soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
La suite (u_n) tend vers ℓ si et seulement si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ.

Preuve

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que (u_n) tend vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$. Soit alors $n \geqslant n_0$. On a $2n \geqslant n_0$ et $2n+1 \geqslant n_0$ ce qui entraîne que $|u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$ et $|u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2$ tel que $|u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_0$ et que $|u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant n_1$. On pose $N = \max(2n_0, 2n_1 + 1)$. On a alors $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Ainsi (u_n) tend vers ℓ.

Remarque 10 Ainsi, si les suites de rang pair et de rang pair d'une suite (u_n) d'admettent pas une même limite, la suite (u_n) diverge.

Exemple 17 La suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ diverge.

Exemple 18 Si une suite (u_n) vérifie :

$$\forall n,p\in\mathbb{N}^\star,\quad 0\leqslant u_{n+p}\leqslant \frac{n+p}{np},$$

alors elle converge vers zéro.

Proposition 10 | Limite d'une suite géométrique

Soit $q\in\mathbb{R}$.

- Si $q>1$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n=+\infty$.
- Si $q=1$ alors la suite (q^n) est constante égale à 1 et donc converge vers 1).
- Si $-1<q<1$ (c'est-à-dire $|q|<1$) alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n=0$.
- Si $q=-1$, (q^n) est bornée mais n'admet pas de limite.
- Si $q<-1$ alors la suite (q^n) n'est pas bornée et n'admet pas de limite.

Enfin, le résultat de croissances comparées vu pour les fonctions reste encore valable pour des suites.

Théorème 5 | Croissances comparées

Soient a, et b des réels **strictement positifs**, et $q>1$.

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{(\ln(n))^a}{n^b}=0,\quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n^b}{q^n}=0,\quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{(\ln(n))^a}{q^n}=0,\quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{q^n}{n!}=0,$$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n^b}{(\ln(n))^a}=\infty,\quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{q^n}{n^b}=\infty,\quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{q^n}{(\ln(n))^a}=\infty,\quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n!}{q^n}=\infty.$$

Résumé Idée des croissances comparées

On se souviendra que la factorielle diverge beaucoup plus vite que l'exponentielle en $+\infty$, qui elle-même diverge beaucoup plus vite en $+\infty$ que toute puissance de n, qui elle-même diverge plus vite que toute puissance de logarithme. Ce que l'on peut noter :

$$(\ln n)^a \underset{+\infty}{\ll} n^b \underset{+\infty}{\ll} q^n \underset{+\infty}{\ll} n!.$$

Preuve Admis.

Remarque 11 (Utilisation des croissances comparées) Les croissances comparées permettent de lever des indéterminations : souvent, il faudra d'abord **factoriser par le terme prédominant**, puis conclure par croissances comparées (celles-ci ne s'appliquent qu'à des produits et des quotients, pas à des sommes).

Exemple 19 Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^5-(\ln n)^2+4n)$.

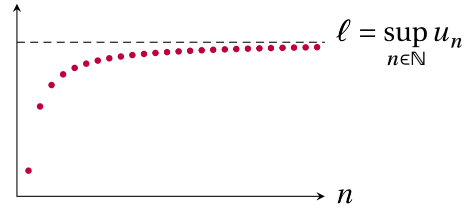
Exemple 20 Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^2}{5^n}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+1\right)$, et : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n+5^n}{1+5^n}$.

2.6. Nature par monotonie

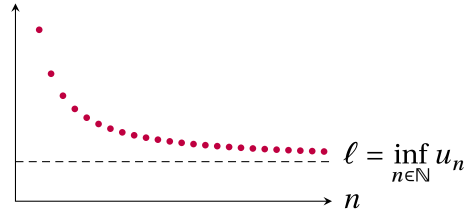
Le théorème qui suit est vrai aussi pour les fonctions, mais nous le verrons plus tard. C'est l'un des théorèmes les plus importants du chapitre.

Théorème 6 | Théorème de la limite monotone

- **[Cas croissant]** Toute suite **croissante et majorée** par un réel M, **converge** vers une limite ℓ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant$ M (la limite ℓ est le plus petit des majorants, c'est à dire $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$).



- **[Cas décroissant]** Toute suite **décroissante et minorée** par un réel m, **converge** vers une limite ℓ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \geqslant \ell \geqslant m$ (la limite ℓ est le plus grand des minorants, c'est à dire $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$)



Preuve On le prouve dans le cas d'une suite croissante. Soit (u_n) une suite croissante. Si (u_n) est majorée, on note alors ℓ la borne supérieure de l'ensemble $\mathrm{U} = \{u_n, n\in\mathbb{N}\}$, ℓ est donc le plus petit des majorants de U. Soit ε un réel strictement positif, $\ell-\varepsilon$ n'est donc pas un majorant de U par définition de ℓ et il existe alors $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\ell-\varepsilon < u_{n_0}$. On en déduit alors par croissance de (u_n) et par définition de ℓ que $\ell-\varepsilon < u_n \leqslant \ell$ (avec $\ell \leq \ell+\varepsilon$) pour tout $n \geqslant n_0$ soit que $|u_n-\ell| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n\geqslant n_0$. Ainsi, la suite (u_n) converge vers ℓ

Remarque 12 **(Utilisation du théorème de convergence monotone.)** Le théorème de convergence monotone est utile pour obtenir la convergence d'une suite dont on ne devine pas la limite. Mais ce n'est pas le seul théorème qui permet d'obtenir la convergence d'une suite : le théorème de gendarmes, par exemple, donne à la fois la convergence de la suite et la valeur de la limite. Le théorème de convergence monotone ne donne pas la limite de la suite, pour obtenir cette limite, il faut en général établir des propriétés vérifiées par cette limite : on commence souvent par montrer un encadrement de la limite par passage à la limite dans une inéquation.

Attention **Ne pas confondre un minorant avec la limite**

Une suite décroissance minorée par $m\in\mathbb{R}$ ne converge pas nécessairement vers m. Par exemple, une suite décroissante minorée par 0 converge-t-elle nécessairement vers 0 ?

Théorème 7 | Divergence et monotonie.
Toute suite croissante (respectivement décroissante) et non majorée (respectivement non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$).

Preuve On le prouve dans le cas d'une suite (u_n) croissante. Si (u_n) n'est pas majorée, il existe pour tout $M \in \mathbb{R}$ un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant M$. La suite (u_n) étant de plus croissante, on a alors $u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant M$ pour tout $n \geqslant n_0$ et la suite (u_n) tend alors vers $+\infty$.

Remarque 13 Ainsi une suite monotone soit converge soit diverge vers $+\infty$ (pour une suite croissante) ou $-\infty$ (pour une suite décroissante).
Pour montrer qu'une suite croissante (resp. décroissante) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), on supposera souvent par l'absurde qu'elle converge.

Exemple 21 (Divergence de la série harmonique (2)) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.

2. En déduire par l'absurde que $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \infty$.

2.7. Suites adjacentes

Définition 11 | Suites adjacentes
Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si :
- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante *(L'une est croissante, l'autre est décroissante.)*
- **[La différence tend vers zéro]** $\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

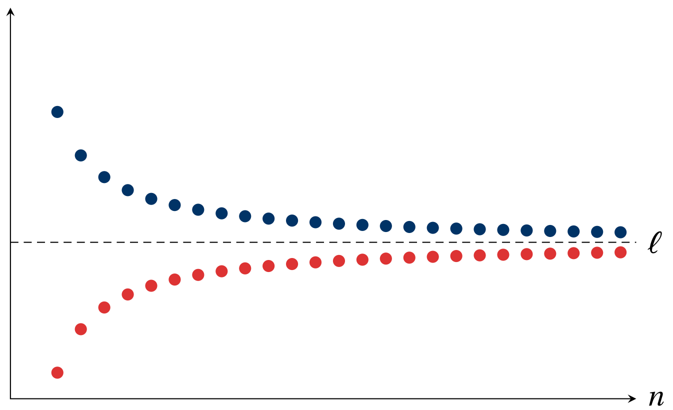
Remarque 14 Si une suite (w_n) décroît (respectivement croît) et converge vers ℓ, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \geq \ell$ (respectivement : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \leqslant \ell$).

Remarque 15 (« La suite décroissante est au dessus de la suite croissante »)
Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante, alors la suite $(v_n - u_n)$ décroît.

Or, par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.
D'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \geqslant 0$, ce qui donne : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geq u_n$.

Théorème 8 | Convergence des suites adjacentes
Deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) **convergent** et convergent **vers une même limite**.

Attention
La convergence est dans **la conclusion**, et non dans la définition de l'adjacence.



Deux suites adjacentes : elles convergent toutes les deux vers ℓ

Preuve

Remarque 16 (A propos des suites adjacentes)
- Lorsque vous devez étudier deux suites en même temps, ayez le réflexe de vérifier si elles ne sont pas, par hasard, adjacentes...
- Etant donné deux suites (u_n) et (v_n) adjacentes et convergentes vers ℓ, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$. Cet encadrement fournit des valeurs approchées de ℓ à une précision quelconque, puisque la différence $(u_n - v_n)$ tend vers 0.

Exemple 22 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Remarque 17 On peut démontrer que la limite de (u_n) et (v_n) est le nombre e (base des logarithmes népériens).
L'encadrement $u_{10} \leqslant \mathrm{e} \leqslant v_{10}$ donne $2,7182818 \leqslant \mathrm{e} \leqslant 2,7182821$.

Exemple 23 **(Convergence d'une série alternée)** Soit la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}$. Montrons que cette suite converge, en étudiant (S_{2n}) et (S_{2n+1}).

2.8. Équivalents

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS. Les équivalents forment un outil puissant (mais dangereux!) pour lever certaines formes indéterminées lors des calcules de limites.

Définition 12 | Suites équivalentes
Soient (u_n) et (v_n) deux suites, tel que (v_n) **ne s'annule pas APCR**. On dit que (u_n) et (v_n) sont *équivalentes* (on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$) si :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Attention
Avec notre définition, une suite ne peut être équivalente à la suite nulle.

Remarque 18 **(Sur la condition « (v_n) ne s'annule pas »)** Cette condition peut être relâchée facilement, en considérant la définition plus générale : « deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes il existe une suite (ε_n) convergeant vers zéro, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n.$$

Cette nouvelle définition a le mérite d'être plus générale (ne nécessite aucune condition sur (v_n)) mais la première suffira amplement pour notre propos.

Cadre

Pour notre définition, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ implique implicitement que $(u_n),(v_n)$ ne s'annulent pas pour n assez grand. Nous ne le préciserons donc pas à chaque fois dans les énoncés.

Exemple 24 On a : $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Méthode Déterminer des équivalents à l'aide d'un encadrement

Supposons que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ au moins pour n assez grand. Alors si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n, w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$ où (a_n) est une suite strictement positive, on montre que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$ en :

1. divisant par a_n tout l'encadrement : $\dfrac{u_n}{a_n} \leqslant \dfrac{v_n}{a_n} \leqslant \dfrac{w_n}{a_n}$.
2. On conclut à l'aide du théorème d'encadrement en faisant tendre n vers $+\infty$.

La même méthode s'applique pour les suites strictement négatives bien sûr, en inversant l'encadrement.

Exemple 25 Soit (u_n) une suite telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad n\leqslant u_n\leqslant n+1$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Proposition 11 | Limite vers équivalent

- Soit (u_n) une suite. Alors :
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\neq 0 \implies u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell.$$
- Soient $(u_n),(v_n)$ deux suites et $\ell\neq 0$. Alors :
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell, v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \implies u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

Preuve Conséquence directe des règles opératoires sur les limites :

Attention

La condition $\ell\neq 0$ est très importante : dire qu'une suite est équivalente à la suite n'ayant pas de sens. Un contre exemple simple pour le deuxième item est le suivant : les suites $(u_n)=\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)=\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ tendent bien vers zéro, et pourtant ne sont pas équivalentes.

Proposition 12 | Équivalent vers limite

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. telles que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors :
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \\ \textbf{(ii)} & u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \end{cases} \implies v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Preuve

Equivalence et opérations. Maintenant que la notion est présentée, on aimerait avoir des règles opératoires sur les équivalents. Malheureusement, vous allez constater que le symbole équivalent est beaucoup moins flexible que le symbole limite. Puisque un équivalent est un quotient,

- le symbole $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ va très bien se comporter avec les opérations multiplicatives : valeur absolue, puissances, produit, quotient, ...,
- en revanche, il va très mal se comporter avec l'addition, le logarithme, l'exponentielle *etc.*.

Proposition 13 | Équivalence et opérations usuelles

Soient (u_n), (v_n), (w_n), (a_n) et (b_n) des suites.

- **[Réflexivité]** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
- **[Symétrie]** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
- **[Transitivité]** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \implies u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.
- **[Valeur absolue]** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \implies |u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.
- **[Multiplication]** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \implies u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n b_n$.
- **[Quotient]** $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n, v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \implies \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_n}{b_n}$. En particulier :
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}.$$
- **[Exposant]**
  - Si $k \in \mathbb{Z}$: $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \implies u_n^k \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^k$.
  - Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si les suites sont strictement positives APCR : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \implies u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$.

Preuve

- **[Réflexivité]** Immédiat par définition.
- **[Symétrie]** Immédiat car si une suite tend vers 1, son inverse aussi.
- **[Transitivité]** On sait que $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc par produit :
$$\frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n} = \frac{u_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
.
- **[Valeur absolue]**
- **[Multiplication]**
- **[Quotient]**
- **[Exposant]** Pour un exposant entier, il suffit de remarquer que $\dfrac{u_n^k}{v_n^k} = \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
Pour un exposant réel, en supposant que u_n et v_n sont strictement positifs à partir d'un certain rang, u_n^α et v_n^α sont bien définis à partir d'un certain rang et on a :
$$\frac{u_n^\alpha}{v_n^\alpha} = \left(\frac{u_n}{v_n}\right)^\alpha = e^{\alpha \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Attention On ne peut pas ...

- passer un terme d'un côté de l'autre côté par exemple.
- sommer des équivalents,
- composer des équivalents par une fonction, même continue en dehors de celles mentionnées dans la proposition précédente (inverse, valeur absolue, puissance). En particulier, on ne compose pas par l'exponentielle, le logarithme *etc.*.

En ce sens, ce symbole diffère de l'égalité. Pour quelques contre-exemples, voir les exemples qui suivent.

Exemple 26 (Pas de somme)

1. $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n-1$ et $-n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n$ alors que :
$$(n+1)+(-n) = 1 \underset{n\to\infty}{\not\sim} -1 = (n-1)+(-n).$$
2. Soient trois suites définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = -\frac{1}{n}, \quad v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \quad w_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}.$$
Alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ mais $u_n + v_n \underset{n\to\infty}{\not\sim} u_n + w_n$.

Exemple 27 **(Pas de composition (exponentielle ici))** Soient deux suites définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = n+1, \quad v_n = n.$$
Alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, mais : $e^{u_n} \underset{n\to\infty}{\not\sim} e^{v_n}$.

Mais alors, comment fait-on pour les sommes et les composées ? Commençons déjà par discuter des sommes.

Méthode Déterminer un équivalent d'une somme

Se ramener à une limite usuelle à l'aide d'une factorisation.

Exemple 28 Donner un équivalent simple de $v_n = e^n + \ln(n)$ quand $n \longrightarrow \infty$.

EQUIVALENTS USUELS. Comment obtenir des équivalents ? Nous allons essentiellement utiliser la définition du nombre dérivé, réecrite sous forme d'un lemme. Mais avant cela, commençons par les polynômes où la technique est déjà connue mais sans jamais avoir parlé d'équivalents.

Proposition 14 | Polynômes et fractions rationnelles

- **[Polynômes]** Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\left(a_p, a_{p-1}, \dots, a_0\right) \in \mathbb{R}^{p+1}$ avec $a_p \neq 0$, on a :
$$a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \underset{n\to+\infty}{\sim} a_p n^p$$
- **[Fractions rationnelles]** Soient $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, \left(a_p, a_{p-1}, \dots, a_0\right) \in \mathbb{R}^{p+1}$ et $\left(b_q, b_{q-1}, \dots, b_0\right) \in \mathbb{R}^{q+1}$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$, on a :
$$\frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \ldots + b_1 n + b_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_p n^p}{b_q n^q}.$$

En résumé : en l'infini, on retrouve qu'un polynôme se comporte comme son terme de plus haut degré et qu'une fraction rationnelle se comporte comme le quotient de ses termes de plus haut degré.

Preuve On fait la démonstration pour les polynômes, le cas des fractions rationnelles en est une conséquence par quotient d'équivalents.

Exemple 29 Déterminer un équivalent simple, puis la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n^7 - n^3 + 2}{5n^9 + 7n^2 + 1}$ pour tout entier naturel n.

Exemple 30 Reprendre l'Exemple 9 à l'aide d'équivalents.

Proposition 15 | Equivalent de $f(u_n) - f(0)$

Soient f une fonction définie sur un voisinage de zéro et (u_n) une suite ne s'annulant pas APCR. Alors :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} \quad f \quad \text{dérivable en zéro} \quad \underline{\textbf{et}} \quad f'(0) \neq 0, \\ \textbf{(ii)} \quad u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{cases} \quad \text{alors :} \quad f(u_n) - f(0) \underset{n \to +\infty}{\sim} f'(0) u_n.$$

Preuve

On déduit alors tout un tas d'équivalents avec plusieurs choix de fonction f.

Proposition 16 | Equivalents usuels

Soit (u_n) une suite telle que : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$. Alors :

- $\sin u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$
- $\cos u_n - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{u_n^2}{2}$
- $\tan u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$
- $e^{u_n} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$
- $\ln(1 + u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$
- $\arctan(u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$.
- Pour tout $\alpha \neq 0$, $(1 + u_n)^\alpha - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \alpha u_n$. En particulier :

$$\sqrt{1 + u_n} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}, \quad \frac{1}{1 + u_n} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} -u_n, \quad \frac{1}{1 - u_n} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n.$$

Attention

La condition $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ est indispensable. Par exemple, $\sin(n) \underset{n \to \infty}{\not\sim} n$ puisque $\dfrac{\sin n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ par théorème d'encadrement.

Preuve

- Mis à part l'équivalent $\cos u_n - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$, tous ces équivalents s'obtiennent facilement grâce à la proposition précédente. Par exemple pour $e^{u_n} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n$:

- Pour le cosinus, on ne peut conclure directement avec la proposition précédente puisque $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$. Mais connaissant les autres équivalents usuels, si (u_n) converge vers 0, on a : $\cos(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 > 0$, on peut donc écrire APCR, $\cos(u_n) = \sqrt{1 - \sin^2(u_n)}$ et on a, par transitivité de l'équivalence et grâce aux formules précédentes,

$$\cos u_n - 1 = \sqrt{1 - \sin^2(u_n)} - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \sin^2 u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}.$$

Faisons un exemple pour terminer de recherche d'équivalent d'une composée.

Exemple 31 Donner un équivalent de $u_n = n \sin\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$ quand $n \longrightarrow \infty$.

Méthode Déterminer un équivalent d'une composée

Il faut utiliser la transitivité de l'équivalence et donc, contrairement à d'habitude, travailler « de l'extérieur vers l'intérieur ».

Attention à la rédeaction

Dans l'exemple précédent, on écrit **surtout pas**

$$\text{« }\sin\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{car} \quad \frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}\text{ ».}$$

Car, rappelons-le, on ne peut pas composer les équivalents par des fonctions quelconques.

Autrement dit, on ne peut pas partir « de l'intérieur » (équivalent de la parenthèse puis composer) mais on peut partir « de l'extérieur ».

Exemple 32 Pour chaque suite $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n)$, déterminer un équivalent simple ainsi que sa limite éventuelle.

- $a_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

- $b_n = \ln\left(\frac{2n+3}{n-5}\right)$

- $c_n = \sqrt{n^4+3n^3-1} - n^2$

- $d_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{2}{n}} - 1}$.

Exemple 33 Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

Remarque 19 **(Équivalent et signe/nature)** Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Alors (u_n) et (v_n) :

- sont de « même nature » : c'est-à-dire qu'elles sont toutes les deux divergentes (éventuellement vers $\pm\infty$) ou toutes les deux convergentes vers la même limite,
- elles sont de même signe APCR.

3. SUITES REMARQUABLES

3.1. Suites récurrentes d'ordre 1

Définition/Proposition 1 | Suite récurrente d'ordre 1
On appelle *suite récurrente d'ordre un* toute suite (u_n) vérifiant une relation de récurrence de la forme :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathscr{D}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n), \end{cases}$$

où $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un domaine $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ vérifiant

$$\boxed{f(\mathscr{D}) \subset \mathscr{D}} \quad \textbf{(Stabilité)},\ \textit{i.e.}:\ \forall x \in \mathscr{D},\ f(x) \in \mathscr{D}.$$

La condition de stabilité étant vérifiée, la suite (u_n) est bien définie.

Preuve *(du caractère bien défini de la suite sous la condition de stabilité.)*

Remarque 20 **(Pourquoi la stabilité ?)** La condition de stabilité est essentielle à la bonne définition de la suite. Pour vous en convaincre, considérons par exemple f la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et posons $u_0 = 2$. Comme $f(u_0) = f(2) = 1$, on peut poser $u_1 = 1$. Mais ensuite $f(1)$? Aucun sens ! La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas définie (on ne peut même pas calculer u_2). La condition de stabilité permet de différencier les situations qui marchent de celles qui ne marchent pas.

Remarquons que nous avo

Les éventuelles limites d'une suite définie comme précédemment sont à chercher parmi les *points fixes* de la fonction mise en jeu.

Définition 13 | Point fixe

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$.
On appelle *point fixe* de $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ tout réel $x \in \mathscr{D}$ tel que $f(x) = x$.

Le théorème ci-après indique que les éventuelles limites d'une suite (u_n) vérifiant une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ sont à rechercher parmi les points fixes de f (dans le cas où la fonction f est continue).

Théorème 9 | Convergence vers un point fixe

Soient $f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, où $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$, et (u_n) une suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Si (u_n) converge vers ℓ et f est définie et **continue** en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.

Preuve

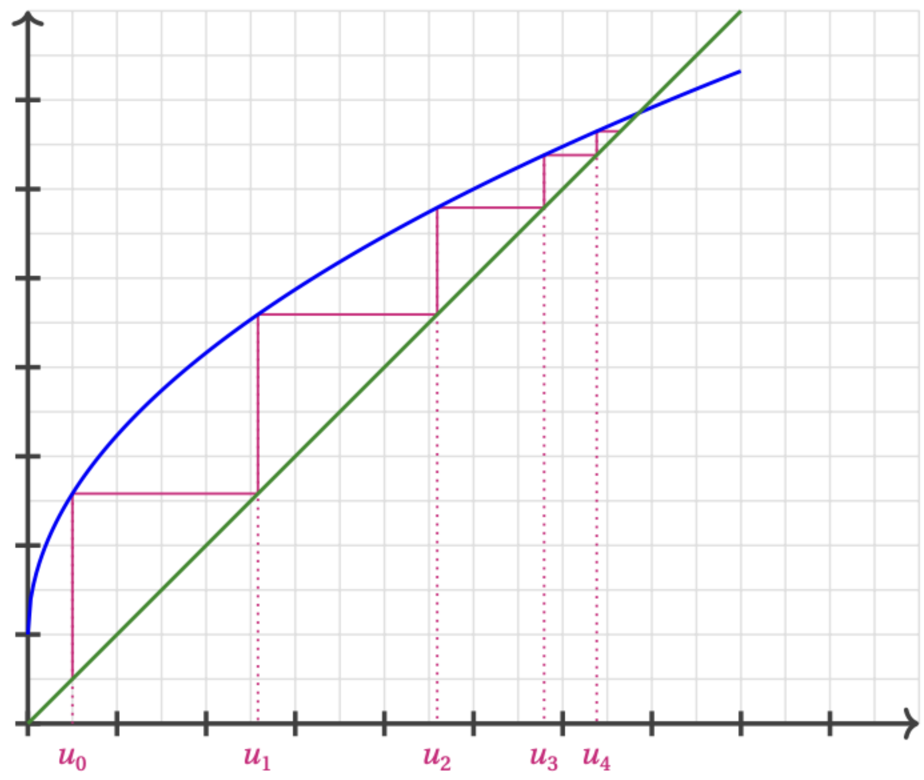
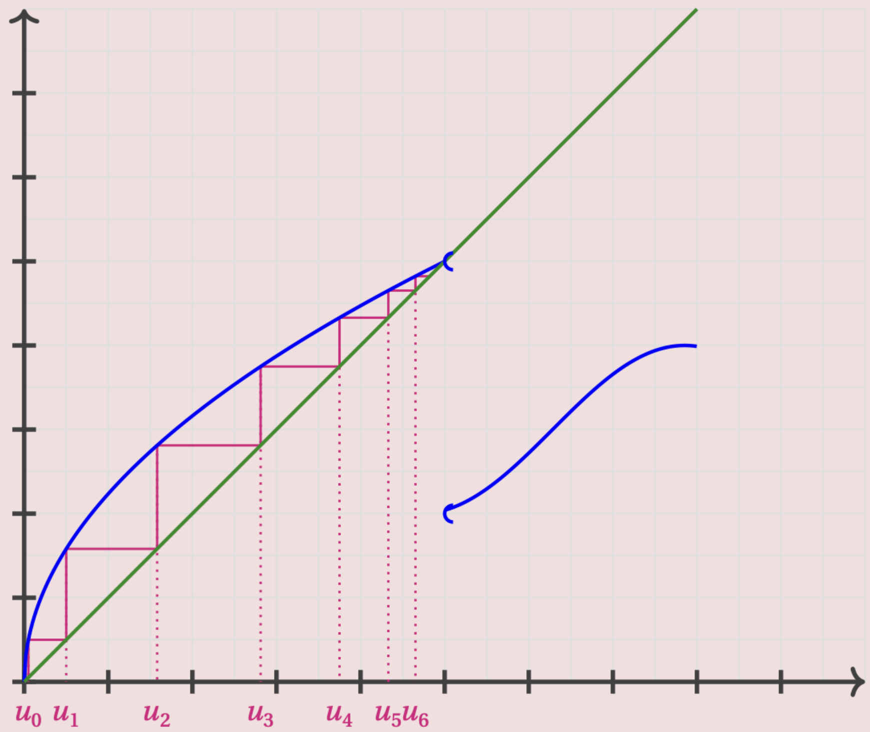


Illustration de la convergence d'une suite vers un point fixe d'une fonction f **continue**.

Attention **Ne pas oublier d'invoquer l'hypothèse de continuité !**

Si la fonction f n'est pas continue, la suite peut converger vers une limite ne vérifiant pas $f(\ell) = \ell$!

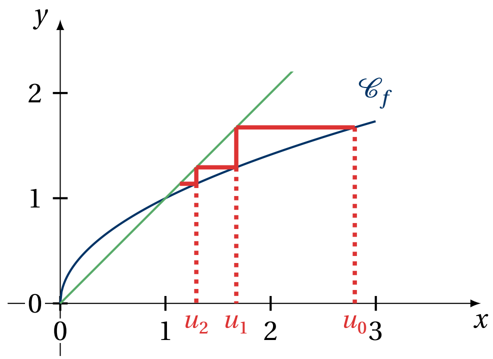


LA SUITE (u_n) CONVERGE VERS 5, AVEC $f(5) \neq 5$ CAR $f(5) = 2$!

Pour les exercices portant sur les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut être amenés à se poser les questions suivantes (vous serez toujours guidés) :

1. « LA SUITE EST-ELLE BIEN DÉFINIE ? » Ceci n'est pas une évidence, voir par exemple si f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ (une racine, un logarithme, *etc.*). En général l'exercice vous guidera sur la recherche d'« intervalles stables », *i.e.* des intervalles I tels que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$. Dans ce cas, si $u_0 \in \mathrm{I}$ une récurrence montrera que $u_n \in \mathbb{N}$ est bien définie et qu'en plus $u_n \in \mathrm{I}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. « EST-ELLE MONOTONE ? » C'est un problème là encore non trivial. Retenez (ce que l'on verra en pratique) qu'il n'y a aucun lien évident entre la monotonie de f et celle de (u_n).
3. « CONVERGE-T-ELLE ? » On aura recours pour cela aux théorèmes d'existence (notamment au théorème de la limite monotone), difficile de faire autrement sans expression explicite.
4. « SI LA SUITE CONVERGE, VERS QUELLE LIMITE ? » Pour cela, un seul résultat au programme, il s'agit de la proposition qui suit.

Exemple 34 Étudions la suite récurrente suivante : $u_0 \geqslant 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.



LA SUITE SEMBLE CONVERGER VERS 1 DANS CE CAS

Exemple 35 On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$.

1. Étudier la fonction f associée.

2. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

3. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. En déduire la nature de la suite.

3.2. Suites implicites

Définition 14 | Suite implicite

On appelle *suite implicite* toute suite (x_n) dont le terme général x_n est donné comme solution (en général unique) d'une équation dépendant d'un paramètre

$n \in \mathbb{N}$, *i.e.* vérifiant une égalité du type :

$f_n(x_n) = 0$ avec f_n qui est une fonction, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Il n'y a pas de résultat général au programme, mais leur étude s'appuie souvent sur un schéma proche de l'exemple ci-après. La difficulté est qu'*a priori* on ne connait pas l'expression générale d'une suite implicite, on utilisera le théorème de convergence monotone pour établir la convergence.

Exemple 36 **(Étude d'une suite implicite - important)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation :

$f_n(x) = 0 \quad (\mathrm{E}_n)$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, où : $f_n(x) = nx + \ln(x)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$. On la note désormais x_n.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in]0, 1]$.

3. La suite (x_n) décroît. <u>*Indication :*</u> *On cherchera à comparer* $0 = f_n(x_n)$ *et* $f_n(x_{n+1})$

4. La suite (x_n) converge vers une limite $\ell \in [0, 1]$ que l'on peut déterminer.

Méthode — Plan d'étude d'une suite implicite

1. Établir l'existence et l'unicité de la suite grâce au théorème de la bijection.
2. Chercher la monotonie en comparant $f_n(x_{n+1})$ à $f_n(x_n)=0$ $\left(\text{ou } f_{n+1}(x_n) \text{ à } f_n(x_n)=0\right)$.
3. Trouver la valeur de la limite : en général on raisonne par l'absurde dans l'identité $f_n(x_n)=0$.

4. INFORMATIQUE

Résumé — des attendus

Voici ce qu'il faut savoir faire en Python à propos des suites :
- Les fonctions permettant de calculer un terme donné d'une suite.
- Les fonctions permettant de calculer le premier terme ou le premier indice d'une suite pour lequel une condition donnée est vérifiée pour la première fois.
- Construire la liste des termes d'une suite jusqu'à un indice donné/ce qu'une condition soit vérifiée.
- Tracer le graphe de la suite en exploitant la liste des termes précédents.

Nous illustrerons ces différents programmes sur les trois suites suivantes :

- **[Explicite]** La suite (u_n), définie explicitement, vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$$
où $a \in \mathbb{R}$ est choisi par l'utilisateur. On peut prouver qu'elle converge vers e^a.
- **[Récurrence d'ordre 1]** La suite (v_n), définie par une relation de récurrence d'ordre 1, vérifiant :
$$\begin{cases} v_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = v_n + \mathrm{e}^{v_n}. \end{cases}$$
On peut prouver qu'elle est croissante quel que soit $a \in \mathbb{R}$ et en déduire, par l'absurde, qu'elle tend vers $+\infty$.
- **[Récurrence d'ordre 2]** La suite (w_n), définie par une relation de récurrence d'ordre 2, vérifiant :
$$\begin{cases} w_0 = a \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ w_1 = b \in \mathbb{R} \text{ choisi par l'utilisateur} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = \frac{\cos(w_n+w_{n+1})}{n+2}. \end{cases}$$
On peut prouver par encadrement qu'elle tend vers 0 puis en déduire que :
$$w_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Remarque 21 (Nommage des variables) Dans tous nos programmes, on respectera les deux conventions suivantes : les variables `n`, `i`, `j` ... serviront à stocker des valeurs d'**indices**, les variables `u`, `v`, `w` ... serviront quant à elles à stocker des valeurs de **termes** des suites. Même si la suite s'appelle autrement que (u_n), on appelle `u` la variable stockant son terme.

4.1. Calcul du n-ième terme

SUITE EXPLICITE. C'est le cas le plus simple, il suffit de retourner l'expression correspondant au terme saisit par l'utilisateur. Voici par exemple le code de la fonction `terme_u(a,n)` qui retourne le terme u_n avec a et n en paramètre de fonction :

Terme n d'une suite définie explicitement

```
def terme_u(a, n):
    """
    retourne la valeur de u_n lorsque u_1=a
    """
    u = (1+a/n)**n
    return u
```

```
>>> terme_u(2, 1)
3.0
>>> terme_u(0, 1)
1.0
```

CAS PARTICULIERS DES SOMMES (SÉRIES) ET PRODUITS. Des suites peuvent être définies à l'aide d'une somme ou d'un produit. On utilisera alors les méthodes vues dans le chapitre sommes/produits du cours de Mathématiques.

(Calcul de $\sum_{k=p}^{n} a_k$)

```
def somme_a(p, n):
    S = 0
    for k in range(p, n+1):
        S += a_k # le terme a_k est à taper à la main en \
        ↪ fonction de la somme
    return S
```

Par exemple, la fonction ci-après réalise le calcul de $\sum_{k=p}^{n} \cos(kx)$, avec $x \in \mathbb{R}$.

```
def somme_cos(p, n, x):
    S = 0
    for k in range(p, n+1):
        S += ma.cos(k*x)
    return S
>>> somme_cos(0, 10, 1)
-0.4174477464559059
>>> somme_cos(0, 10, 0) # résultat attendu car on somme 1, \
↪ onze fois
11.0
```

(Calcul de $\prod_{k=p}^{n} a_k$)

```
def produit(p, n):
    P = 1
    for k in range(p, n+1):
        P *= a_k # à adapter en fonction de la somme
    return P
```

Par exemple, la fonction ci-après réalise le calcul de $\prod_{k=p}^{n} e^{kx}$, avec $x \in \mathbb{R}$.

```
def produit(p, n, x):
    P = 1
    for k in range(p, n+1):
        P *= ma.exp(k*x)
    return P
>>> produit(0, 10, 1)
7.694785265142015e+23
>>> produit(0, 10, 0) # résultat attendu
```

```
1.0
```

Suite récurrente d'ordre 1. Pour calculer v_n on procède ainsi.

1. On prévoit un test `if` pour la condition initiale, puis :
2. on initialise une variable u avec la valeur de v_0.
3. On parcourt à l'aide d'une boucle `for` tous les indices i de 1 à n (l'indice mathématique correspondant). Pour chaque valeur de i, on remplace u (qui contient v_{i-1}) par sa nouvelle valeur, v_i, à l'aide de la formule de récurrence.
4. En sortie de boucle, u contient la valeur de v_n ; il suffit donc de renvoyer u.

Voici par exemple le code de la fonction `terme_v(a, n)` qui retourne le terme v_n avec $v_0 = a$ et n en paramètre de fonction :

Terme n d'une suite récurrente d'ordre 1

```
def terme_v(a, n):
    """
    retourne la valeur de v_n lorsque v_0 = a
    """
    if n == 0:
        return a
    else:
        u = a
        for i in range(1, n+1):
            # u est ici la valeur précédente
            u = u + ma.exp(u)
            # v est ici la valeur suivante
        return u
```

```
>>> terme_v(0, 1)
1.0
>>> terme_v(0, 2)
3.718281828459045
```

Remarque 22 (Version « universelle » sans `if`) Le test `if` n'est ici pas obligatoire. En effet, si `n = 0` alors la boucle `for` ne s'exécutera pas (bornes dans le mauvais sens) et donc on retournera bien `v = a`.

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 2. Pour calculer w_n on procède ainsi :

1. On prévoit un test `if` pour les deux conditions initiales, puis :
2. on initialise **deux** variables, u et v, avec les valeurs de w_0 et de w_1.
3. On parcourt à l'aide d'une boucle `for` tous les indices i de 2 à n (l'indice mathématique correspondant). Pour chaque valeur de i, on calcule le terme suivant noté **w** à l'aide de la relation de récurrence puis on remplace **simultanément** (donc au moyen d'une **double-affectation**)u et v (qui contiennent respectivement les valeurs de w_{i-1} et de w_i) par les nouvelles valeurs (qui contiennent alors respectivement les valeurs de w_i et w_{i+1}).
4. En sortie de boucle, v contient la valeur de w_n ; il suffit donc de renvoyer w.

Voici par exemple le code de la fonction `terme_w(a, b, n)` qui retourne le terme w_n avec $w_0 = a$, $w_1 = b$ et n en paramètre de fonction.

Terme n d'une suite récurrente d'ordre 2

```
def terme_w(a, b, n):
    """
    retourne la valeur de w_n lorsque w_0 = a et w_1 = b
    """
    if n == 0:
        return a
    elif n == 1:
        return b
    else:
        u, v = a, b
        for i in range(2, n+1):
            # u contient w_{i-1} et v contient w_i
            u, v = v, ma.cos(u+v)/i
            # u contient désormais w_i et v contient w_{i+1}
        return v
```

```
>>> terme_w(0, 1, 0)
0
>>> terme_w(0, 1, 1)
1
>>> terme_w(0, 1, 2)
0.2701511529340699
```

Remarque 23 **(Version « universelle » sans `if`)** Là encore, le test `if` n'est pas indispensable. Il est possible d'adapter la seconde partie de la fonction (changement de boucle `for` et dans la récurrence) afin qu'elle convienne également aux cas `n = 0` et `n = 1`.

```
def terme_w_bis(a, b, n):
    """
    retourne la valeur de w_n lorsque w_0 = a et w_1 = b
    """
    u, v = a, b
    for i in range(1, n+1):
        u, v = v, ma.cos(u+v)/(i+1)
    return u
```

```
>>> terme_w_bis(0, 1, 0)
0
>>> terme_w_bis(0, 1, 1)
1
>>> terme_w_bis(0, 1, 2)
0.2701511529340699
```

Elle retourne bien également les bons termes.

4.2. Calcul du premier terme/indice vérifiant une condition

Pour réaliser ces fonctions, il va falloir calculer les termes successivement jusqu'à ce que la condition soit vérifiée. Pour cela on utilisera une boucle `while` : tant que la condition **n'est pas vérifiée**, on calcule le terme suivant ; reste alors à renvoyer le dernier terme/indice. On parle en général *d'algorithme de seuil*.

Attention

Contrairement aux boucle `for`, une boucle `while` ne permet pas de parcourir automatiquement les différents indices. Il faudra donc dans nos programmes introduire une variable contenant la valeur de l'indice, l'initialiser correctement et l'augmenter de 1 à chaque passage dans la boucle.

SUITE EXPLICITE. Par définition de la limite, on sait par exemple que comme la suite (u_n) converge vers e^a, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \implies |u_n - e^a| < \varepsilon.$$

Voici une fonction cherchant l'entier n_0 en question.

Algorithme de seuil pour une suite explicite

```
def seuil_u(a,eps):
```

```
    """
    retourne le premier indice n pour lequel |u_n-exp(a)|<eps
    """
    n = 1
    u = (1+a/n)**n
    while abs(u-exp(a)) >= eps:
        n += 1
        u = (1+a/n)**n
    return n
```

Remarque 24 Il est parfois possible de calculer l'entier n_0 explicitement en résolvant une équation/inéquation, mais cela n'est pas possible sur cet exemple (même chose pour les suivants).

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 1. Pour réaliser ces fonctions, il y a un unique changement à apporter aux fonctions précédentes : remplacer la boucle `for` par une boucle `while`.

On sait par exemple que la suite (v_n) tend en croissant vers $+\infty$, donc :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \implies v_n \geq A.$$

Voici la fonction qui retourne l'indice n_0, a et A étant en paramètre de fonction.

Algorithme de seuil pour une suite récurrente d'ordre 1

```
def seuil_v(a, A):
    """
    retourne le premier indice n pour lequel v_n >= A
    """
    n = 0
    v = a
    while v < A:
        n += 1
        v = v + ma.exp(v)
    return n
```

```
>>> n_0 = seuil_v(1, 10)
>>> n_0
2
>>> terme_v(1, n_0)
44.911837503175164
>>> terme_v(1, n_0-1)
3.718281828459045
```

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 2. Pour réaliser ces fonctions, il y a un unique changement à apporter aux fonctions précédentes : remplacer la boucle `for` par une boucle `while`.

On sait par exemple que la suite (w_n) converge vers 0, donc :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \implies |w_n| < \varepsilon.$$

Voici la fonction qui retourne l'indice n_0, a, b et ε étant en paramètre de fonction.

Algorithme de seuil pour une suite récurrente d'ordre 2

```
def seuil_w(a, b, eps):
    """
    retourne le premier indice n pour lequel |w_n|<eps
    """
    n = 0
    u, v = a, b
    while abs(u) >= eps:
        n += 1
        u, v = v, ma.cos(u+v)/n
    return n
```

```
>>> n_0 = seuil_w(1, 1, 10**(-3))
>>> n_0
1001
>>> terme_w(0, 1, n_0)
0.0009989989999007198
>>> terme_w(0, 1, n_0-1)
0.000999997993999421
```

4.3. Construction de la liste des termes et tracé

On construit la liste de proche en proche à l'aide d'une boucle `for` ou `while` et de la méthode `append` sur les listes. Vous noterez que les versions avec seuil permettent de retrouver les algorithmes de seuil précédents (en retournant la longueur de la liste obtenue).

SUITE EXPLICITE. On donne à titre d'exemple les fonctions qui retournent la liste des termes u_1 à u_n.

Liste de termes sous condition ou non – Suite explicite

```
def liste_terme_u(a, n):
    """
    retourne la liste [u_1,...,u_n] (u_0 n'existe pas !)
    """
    L = []
    for i in range(1, n+1):
        L.append((1+a/i)**i)
    return L
```

```
>>> liste_terme_u(1, 10)
[2.0, 2.25, 2.37037037037037, 2.44140625, 2.4883199999999994, \
↪ 2.5216263717421135, 2.546499697040712, 2.565784513950348, \
↪ 2.5811747917131984, 2.5937424601000023]
```

```
def liste_seuil_u(a, eps):
    """
    retourne la liste [u_1,...,u_n] où n est le premier indice n \
    ↪ pour lequel |u_n-exp(a)|<eps"""
    n = 1
    L = [(1+a/n)**n]
    while abs(L[-1] - ma.exp(a)) >= eps:
        n += 1
        L.append((1+a/n)**n)
    return L
```

```
>>> liste_seuil_u(1, 10**(-1))
[2.0, 2.25, 2.37037037037037, 2.44140625, 2.4883199999999994, \
↪ 2.5216263717421135, 2.546499697040712, 2.565784513950348, \
↪ 2.5811747917131984, 2.5937424601000023, 2.6041990118975287, \
↪ 2.613035290224676, 2.6206008878857308]
```

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 1. On construit une liste `L` telle que `L[i]` contienne la valeur de v_i. Il n'est alors plus nécessaire de conserver le terme précédent dans une variable : lors du calcul de v_i, on dispose de la valeur de v_{i-1}, c'est précisément `L[-1]`, le dernier terme ajouté.

On donne à titre d'exemple une fonction qui retourne la liste des termes v_0 à v_n et une autre qui retourne la liste de tous les termes de (v_n) jusqu'à ce que $v_n \geq A$.

Liste de termes sous condition ou non – Suite d'ordre 1

```
def liste_terme_v(a, n):
    """
    retourne la liste [u_0,...,u_n]
    """
    L = [a]
    for _ in range(1, n+1):
        L.append(L[-1] + ma.exp(L[-1]))
    return L
```

```
>>> liste_terme_v(1, 3)
[1, 3.718281828459045, 44.911837503175164, \
↪ 3.1986240606431162e+19]
```

```
def liste_seuil_v(a, A):
    """
    retourne la liste [v_0,...,v_n] où n est le premier indice n \
    ↪ pour lequel v_n>=M
    """
    n = 0
    L = [a]
    while L[-1] < A:
        n += 1  ici cet entier n ne sert finalement pas car la récurrence a des coefficients \
  ↪ indépendants de n
        L.append(L[-1] + ma.exp(L[-1]))
    return L
```

```
>>> liste_seuil_v(1, 3)
[1, 3.718281828459045]
```

SUITE RÉCURRENTE D'ORDRE 2. On construit une liste `L` telle que `L[i]` contienne la valeur de w_i. Là encore, il n'est alors plus nécessaire de conserver les termes précédent dans des variables : lors du calcul de w_i, on dispose de la valeur de w_{i-1} dans `L[i-1]` et de w_{i-2} dans `L[i-2]`. On donne à titre d'exemple une fonction qui retourne la liste des termes w_0 à w_n et une autre qui retourne la liste de tous les termes de (w_n) jusqu'à ce que $|w_n| < \epsilon$. Notons que dans deux fonctions, et ce afin d'éviter la gestion de cas particuliers, on suppose que la liste finale contient au moins w_0 et w_1.

Liste de termes sous condition ou non – Suite d'ordre 2

```python
def liste_terme_w(a, b, n):
    """
    retourne la liste [w_0,w_1,...,w_n] (n>=1)
    """
    if n == 0:
        return [a]
    elif n == 1:
        return [a, b]
    else:
        L = [a, b]
        for i in range(2, n+1):
                L.append(ma.cos(L[-2]+L[-1])/i)
        return L
```

```python
>>> liste_terme_w(1, 1, 10)
[1, 1, -0.2080734182735712, 0.23415848554264707, \
↪ 0.24991495098085725, 0.1770213081859069, 0.15170644429544455, \
↪ 0.13520769153107332, 0.11989021517204179, 0.10751539939271154, \
↪ 0.09742545791160233]
```

```python
def liste_seuil_w(a, b, eps):
    """
    retourne la liste [w_0,w_1,...,w_n] (n>=1) où n est le \
    ↪ premier indice pour lequel |w_n|<eps
    """
    n = 0
    L = [a, b]
    while abs(L[n]) >= eps:
            n += 1  ici cet entier n sert
            L.append(ma.cos(L[-2]+L[-1])/n)
    return L
```

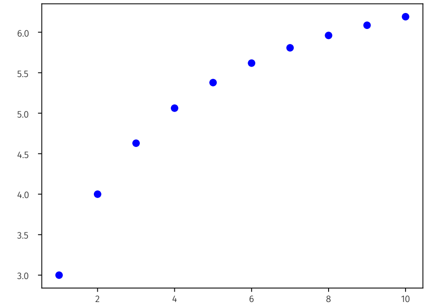
Remarque 25 **(Suites imbriquées)** Il faut savoir également en pratique adapter ces algorithmes à des suites récurrentes imbriquées.

4.4. Tracer une suite

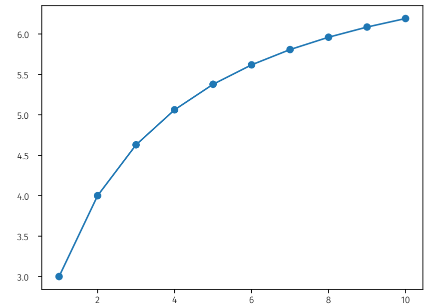
On s'y prend comme pour les fonctions, on a besoin donc de la liste des termes de ladite suite. Traçons par exemple (u_n).

Tracé de la suite (u_n) sur $[\![0, 10]\!]$

```python
import matplotlib.pyplot as plt
n = 10
X = list(range(1, n+1)) # entiers entre 1 et n
Y = liste_terme_u(2, n)
plt.plot(X, Y, "bo") # o : style de marker, des points non \
↪ reliés
```




```python
plt.plot(X, Y, marker = 'o') # des points reliés cette fois, un \
↪ petit peu plus visuel
```



5. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Concernant les limites :
   - Connaître l'idée intuitive de la définition mathématique des limites .... ☐
   - savoir déterminer des limites en utilisant les théorèmes (somme, produit, quotient) .... ☐
   - savoir utiliser le théorème d'encadrement et les théorèmes de comparaison .. ☐
   - Connaître les croissances comparées et savoir les détecter .... ☐
   - savoir appliquer le théorème de la limite monotone .... ☐
2. Savoir reconnaître les suites adjacentes mutuelle, et ne pas mélanger hypothèses (monotonie et différence) et conclusion (convergence) .... ☐
3. Savoir démontrer que deux suites sont équivalentes .... ☐

5.1. Suites explicites

Exercice 1 | Études de monotonies Solution Étudier la monotonie des suites définies par :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) - n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \frac{\ln(n)}{n}$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n + 2(-1)^n$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

Exercice 2 | Limites de suites définies explicitement Solution Étudier le comportement en $+\infty$ des suites ci-dessous.

1. $u_n = \dfrac{n}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$
2. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n^2)$
3. $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$
4. $u_n = \dfrac{2^n + n}{2^n}$
5. $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - \ln(n^3)}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$
7. $u_n = \dfrac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n}$
8. $u_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$
9. $u_n = n^2 - n\cos n + 2$
10. $u_n = \dfrac{n! + (n+1)!}{(n+2)!}$
11. $u_n = \ln(2^n + n)$
12. $u_n = n^{\frac{1}{n}}$
13. $u_n = (\ln n)^n$
14. $u_n = \dfrac{n^3 + 2^n}{3^n}$
15. $u_n = (n^2 + n + 1)^{\frac{1}{n}}$
16. $u_n = n^2\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right)$.

Exercice 3 | Étude de la suite de POISSON Solution On considère dans cet exercice la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{\lambda^n}{n!}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

1. Étudier la monotonie de (u_n) dans les cas $\lambda = 1, \lambda = 2$.
2. En cherchant une relation de récurrence sur les termes de (u_n), écrire une fonction d'en-tête `trace_poisson(lamba)` sans argument qui trace la suite (u_n) sur $[\![0\,,\,10]\!]$ pour $\lambda \in \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right\}$. Que conjecturer quant à la monotonie ? la nature ? *`lamba` correspond donc ici bien sûr à λ.*
3. Démontrer ces conjectures.

5.2. Suites définies par des sommes ou des produits

Exercice 4 | Encadrement et sommes Solution En vous aidant du théorème d'encadrement, étudier la convergence des suites suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k}$.

Exercice 5 | Somme de RIEMANN $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ Solution

1. Montrer que : $\forall k \geq 2, \quad \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
2. On considère la suite définie sur $\mathbb{N}^\star$ de terme général $v_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k}$. Montrer qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3. En déduire que la suite définie sur $\mathbb{N}^\star$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge. *On pourra commencer par essayer d'appliquer le théorème de convergence monotone.*

Exercice 6 | **Somme de Riemann** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ Solution

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :
$$2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right).$$

2. En déduire les limites quand n tend vers $+\infty$ des deux suites (u_n) et (v_n) dont le terme général est pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}.$

Exercice 7 | Solution Montrer que les suites $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}, \quad \mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}.$$
sont adjacentes. Qu'en conclure ?

Exercice 8 | **Avec partie entière** Solution Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par : $\quad u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor.$

Exercice 9 | **Étude d'un produit** Solution

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $\quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) < x.$

2. En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad p_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

5.3. Suites récurrentes

Exercice 10 | **Calcul de termes explicites (1)** Solution Pour ces suites définies par récurrence, calculer le terme général en fonction de n :

1. $u_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_{n+1} = \frac{3(n+1)}{2n} u_n.$ *Indication : On cherchera à conjecturer une formule, que l'on démontrera par récurrence*

2. $u_0 = 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n^3.$ *Indication : On pourra procéder comme précédemment, ou en introduisant la suite $(\ln(u_n))_n$ après avoir justifié son existence.*

Exercice 11 | **Calcul de termes explicites (2)** Solution Soit une suite (u_n) qui vérifie la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n.$$

1. Calculer $1-u_{n+1}$ en fonction de $1-u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n), si elle existe, en fonction du premier terme u_0.

Exercice 12 | $u_{n+1} = f(u_n)$**, avec** f **polynomiale** Solution On définit la suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\quad \forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3.$

1. Étudier la fonction f associée.

2. Étudier le signe de $g : x \longmapsto f(x) - x$.

3. Calculer les limites finies éventuelles de la suite (u_n).

4. On suppose que $u_0 > 2$.

4.1) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n > 2$.

4.2) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

4.3) Étudier la limite de la suite (u_n).

5. On suppose que $u_0 \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$.

5.1) Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \in \left]\frac{2}{3}, 2\right[$.

5.2) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

5.3) Étudier la limite de la suite (u_n).

5.4. Couples de suites récurrentes

Exercice 13 | Solution Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -2a_n + b_n, \quad b_{n+1} = 3a_n.$

1. Démontrer que la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n en fonction de n.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer b_n en fonction de n.

Exercice 14 | Solution On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par :
$$u_1 = 1 \quad v_1 = 12, \quad \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $w_n = v_n - u_n$. Donner l'expression de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $t_n = 3u_n + 8v_n$. Donner l'expression de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

4. On souhaite retrouver les résultats précédents à l'aide d'un calcul matriciel.

4.1) On note $P = \begin{pmatrix} \frac{-8}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

4.2) On note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Chercher une matrice $A \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$, puis rappeler sans justifier une expression de X_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

4.3) Calculer $P^{-1}AP$, puis en déduire que A est semblable à une matrice diagonale $D \in \mathfrak{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Donner sans justification une expression de A^n en fonction de D^n.

4.4) Déterminer une expression de (u_n) en fonction de n, puis retrouver la limite de (u_n). *La même démarche pourrait être appliquée à* (v_n).

5.5. Suites d'intégrales

Exercice 15 | ♥ Solution On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\,dt.$$

1. Justifier que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, puis calculer I_0, I_1 et I_2.
2. **2.1)** Démontrer que : $\forall n \geq 0, \quad I_n \geq 0$.
   2.2) En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 16 | ♥ Solution On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt.$$

1. Calculer u_0 et u_1.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 17 | Solution On définit la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad I_n = \int_1^e x^2(\ln(x))^n\,dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Montrer que : $\forall x \in [1,e], \quad 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \dfrac{x}{e}$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$.

5.6. Suites implicites

Exercice 18 | ♥ Solution

1. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'équation $x^n + x - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\mathbb{N}}$ est majorée par 1 et minorée par 0.
3. Étudier la monotonie de la suite.
4. Étudier la convergence de la suite.
5. Montrer qu'il est impossible que la suite converge vers une limite $\ell < 1$.
6. Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Exercice 19 | ♥ Solution Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution. On notera a_n cette solution.
2. Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante.
3. Étudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

SOLUTIONS DES EXERCICES

Solution (exercice 1) Énoncé

1. La suite (u_n) est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1}-u_n$.
$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2^k}-(n+1)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}+n=\frac{1}{2^{n+1}}-1.$$
Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{2^{n+1}}<1$. Ainsi la suite $\boxed{(u_n)\text{ est décroissante}}$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite définie explicitement et $u_n=f(n)$ avec
$$f:x\longmapsto f(x)=\frac{\ln x}{x}.$$
L'étude de la monotonie de la fonction f sur $[1,+\infty[$ permet d'en déduire directement la monotonie de la suite.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions dérivables. On obtient
$$\forall x\in\mathbb{R}^{+\star},\ f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$
Étudions le signe de $1-\ln x$ ($x^2\geq 0$ donc le signe de la dérivée est bien le signe de $1-\ln x$) : $1-\ln x>0\iff \ln x<1\iff x<e$ car la fonction exponentielle est strictement croissante. Ainsi, la fonction f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. Ainsi, à partir du rang 3, la suite $\boxed{(u_n)_{n\geq 3}\text{ est décroissante}}$.
3. La suite (u_n) est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1}-u_n$.
$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\sum_{k=0}^{2(n+1)}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\\&=\sum_{k=0}^{2n+2}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2n+3}}-\frac{1}{\sqrt{2n+2}}\\&\leqslant 0\quad\text{puisque }\sqrt{2n+3}\geqslant\sqrt{2n+2}.\end{aligned}$$
Ainsi, la suite $\boxed{(u_n)\text{ est décroissante}}$.
4. On remarque que
$$u_{n+1}-u_n=n+1+2(-1)^{n+1}-n-2(-1)^n=1+2(-1)^{n+1}+2(-1)^{n+1}=1+4(-1)^{n+1}.$$
Ainsi, si $n=2p$ pair, on obtient : $u_{2p+1}-u_{2p}=5>0$ et si $n=2p+1$ impair, on obtient : $u_{2p+2}-u_{2p+1}=-3<0$. Ainsi la suite $\boxed{(u_n)\text{ n'est pas monotone}}$.
5. La suite (u_n) est définie par une somme, on étudie donc le signe de $u_{n+1}-u_n$.
$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k\ln k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}>0.$$
Ainsi, la suite $\boxed{(u_n)\text{ est croissante}}$.

Solution (exercice 2) Énoncé Je ne donne ici que les réponses et quelques indications pour trouver les limites demandées. Une telle rédaction dans une copie serait très insuffisante.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}=+\infty$ par composée et produit de limite car $\cos(0)=1$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)-\ln(n^2)=-\infty$ en utilisant $\ln\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ et le théorème des monômes de plus haut degré.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2$ en utilisant le fait que $\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{2}{n}$ (limite très classique fait en cours).
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+n}{2^n}=1$ en mettant en facteur en haut et en bas le terme dominant, à savoir 2^n et en utilisant une croissance comparée car $2^n=e^{n\ln 2}$.
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n-\ln(n^3)}=1$ en mettant en facteur en haut et en bas n et en remarquant que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$ par le théorème des gendarmes et que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n^3)}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3\ln(n)}{n}=0$ par croissance comparée.
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}$ en écrivant que $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ et d'après le théorème sur les monômes de plus haut degré.
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-4^n}{3^n+4^n}=-1$ en mettant en facteur en haut et en bas 4^n le terme dominant et appliquant le théorème sur les suites géométriques.
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}=0$ en utilisant le théorème des gendarmes car : $0\leqslant\frac{1+(-1)^n}{n}\leqslant\frac{2}{n}$.
9. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2-n\cos n+2=+\infty$ en mettant en facteur le terme dominant n^2 et en utilisant le théorème des gendarmes avec $\left|\frac{\cos n}{n}\right|\leq\frac{1}{n}$.
10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+1)!}{(n+2)!}=0$ en utilisant la définition des factorielles.
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(2^n+n)=+\infty$ par propriété sur les somme et composée de limites.
12. $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$ car $n^{1/n}=e^{1/n\ln n}$ puis par croissance comparée, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$.
13. $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln n)^n=+\infty$. Il n'y a pas de forme indéterminée ici, il suffit d'écrire

que $(\ln n)^n = e^{n\ln(\ln n)}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2^n}{3^n} = 0$ en mettant 2^n en facteur au numérateur et en utilisant ensuite le théorème sur la convergence des suites géométriques et les croissances comparées car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3}{e^{n\ln 2}} = 0$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$ en transformant l'expression en mettant le terme dominant n^2 en facteur :

$$(n^2+n+1)^{\frac{1}{n}} = e^{1/n\ln(n^2+n+1)}.$$

Le terme en exposant dans l'exponentielle est alors

$$\frac{\ln\left(n^2+n+1\right)}{n} = \frac{\ln\left(n^2\right)}{n} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n}.$$

On obtient alors la limite voulue en utilisant les croissances comparées.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)-1\right)$: on utilise ici les équivalents usuels. On a : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n^2 \times \left(-\dfrac{1}{2n^2}\right) = -\dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{n} +\infty u_n = -\dfrac{1}{2}$.

Solution (exercice 3) Énoncé

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \frac{\lambda^n}{n!}\left(\frac{\lambda}{n+1} - 1\right) \\ &= \frac{\lambda^n}{n!}\frac{\lambda-n-1}{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ si et seulement si $\lambda - n - 1 \leqslant 0$ donc si et seulement si $n \geqslant \lambda - 1$.

- Lorsque $\lambda = 1$, on constate que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.
- Lorsque $\lambda = 2$, on constate que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante à partir du rang } 1}$, et croissante entre $n = 0$ et $n = 1$.

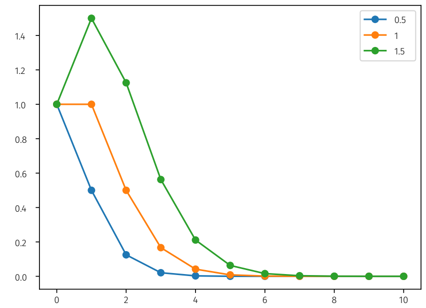
2. On a la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\lambda}{n+1} \times \frac{\lambda}{n!} = \frac{\lambda}{n+1} \times u_n.$$

Avec en terme initial $u_0 = 1$. D'où le programme ci-après pour construire la liste des $n+1$ premiers termes.

```
def trace_poisson(lamba):
    """
    Renvoie la liste [u_0,...,u_n]
    """
    L = [1]
    u = 1
    for i in range(1, n+1):
        u = u*(lamba/i)
        L.append(u)
    return L

for lamba in [1/2, 1, 3/2]:
    plt.plot(trace_poisson(lamba), label=str(lamba),marker \
    ↪ = 'o')
    plt.legend()
```



On conjecture alors que la suite semble tendre vers zéro et pour tous les λ testés. Pour la monotonie, on constate qu'elle semble décroissante globalement si $\lambda \in [0,1]$ et décroissante à partir d'un certain rang si $\lambda > 1$. C'est ce que nous allons établir.

3. Par croissances comparées, on a $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0}$.

Pour la monotonie, on reprend les calculs précédents, on a $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ si et seulement si

$$n \geqslant \lambda - 1 \iff n \geqslant \lfloor \lambda - 1 \rfloor + 1.$$

On rappelle que $n_\lambda = \lfloor \lambda - 1 \rfloor + 1$ est le plus petit entier supérieur à $\lambda - 1$. Deux cas se présentent alors :

- Si $\lambda > 1$ alors $\lambda - 1 > 0$ et (u_n) est décroissante à partir du rang n_λ.
- Si $\lambda \in [0,1]$, alors $\lambda - 1 \leqslant 0$ et donc (u_n) est décroissante.

Solution (exercice 4) Énoncé Comme souvent lorsque l'on doit étudier des suites définies par des sommes, on essaye d'encadrer le terme général de la suite en utilisant que k est compris entre, par exemple, 1 et n.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On a, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:
$$1 \leqslant k \leqslant n \iff n^2+1 \leqslant n^2+k \leqslant n^2+n \iff \frac{1}{1+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2+n}.$$
Comme la dernière inégalité est vraie pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on somme cette inégalité pour k allant de 1 à n et on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+1} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+n} \iff \frac{n}{1+n^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{n(1+n)}.$$
Or le théorème sur les monôme de plus haut degré pour les limites donne
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{1+n^2} = 0 = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+n}.$$
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on obtient que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
2. Le même raisonnement donne :
$$1 \leqslant k \leqslant n \iff \frac{n}{1+n^2} \geq \frac{n}{n^2+k} \geq \frac{n}{n^2+n}.$$
Puis, en sommant, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} \geq u_n \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \iff \frac{n^2}{1+n^2} \geq u_n \geq \frac{n}{1+n}.$$
Or le théorème sur les monômes de plus haut degré pour les limites donne
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1 = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{1+n}.$$
Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on obtient que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
3. Le même type de raisonnement donne :
$$1 \leqslant k \leqslant n \iff \frac{k}{1+n} \geq \frac{k}{n+k} \geq \frac{k}{2n}.$$
Puis, en sommant, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1} \geq u_n \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2n} \iff \frac{n(n+1)}{2(n+1)} \geq u_n \geq \frac{n(n+1)}{4n} \iff \frac{n}{2} \geq u_n \geq \frac{n+1}{4}.$$
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{4} = +\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq \frac{n+1}{4}$, le théorème de minoration assure que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Solution (exercice 5) Énoncé

1. Soit $k \geq 2$, on a
$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}.$$
2. On utilise la relation démontrée dans la question précédente. On obtient, pour $n \geq 2$,
$$v_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$
On reconnaît alors une somme télescopique. On obtient ainsi
$$v_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$$
Ainsi, la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est convergente et : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 2$.
3. On utilise alors l'indication et on montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante et majorée.
   - étude de la monotonie :
   Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a
   $$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n+1} > 0.$$
   Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est bien croissante.
   - Vérifions qu'elle est majorée :
   On utilise pour cela les questions précédentes. On remarque que
   $$\forall k \in \{2, \dots n\}, \quad k-1 \leq k \iff k(k-1) \leq k^2 \iff \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$
   Ainsi, en sommant pour k allant de 2 à n, on obtient que :
   $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \implies \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \implies u_n \leq v_n.$$
   Attention, cela ne suffit pas à montrer que la suite est majorée car v_n dépend de n. Mais on sait que (v_n) est convergente, donc bornée, donc majorée. Ainsi, on obtient que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n \leq 2.$$
   Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est majorée par 2.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante et majorée par 2 donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge donc vers une limite finie.

Solution (exercice 6) Énoncé

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Quand une expression comporte des racines carrées, une idée est d'utiliser la quantité conjuguée. On obtient alors :
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}.$$
On obtient alors :
$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \iff \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq 2\sqrt{n}.$$
Or la dernière inégalité est toujours vérifiée car $n+1 \geq n$ et que la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Un raisonnement analogue permet de montrer l'autre sens de l'inégalité.

2. • Pour tout $k \geq 1$, on a donc démontré que
$$2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$
On somme alors cette inégalité pour k allant de 1 à n et on obtient
$$2\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) \leqslant u_n \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right).$$
Les deux sommes de chaque côté sont télescopiques et se calculent donc grâce à un changement de variable. Faisons le par exemple pour la première :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+1}-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\\ &= \sum_{k=2}^{n+1}\sqrt{k}-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n}\\ &= \sqrt{n+1}-1.\end{aligned}$$
Un calcul similaire donne pour la deuxième somme télescopique :
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right) = \sqrt{n}.$$
Ainsi, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$2\left(\sqrt{n+1}-1\right) \leqslant u_n \leqslant 2\sqrt{n}.$$

• On peut alors en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ en utilisant le théorème de minoration : en effet, on a
$$u_n \geq 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) \lim_{n\to+\infty} 2\left(\sqrt{n+1}-1\right) = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

• En divisant l'inégalité trouvée ci-dessus par $\sqrt{n} > 0$, on obtient que
$$2\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant v_n \leqslant 2.$$
Or, on a :
$$\lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$$
et ainsi le théorème des gendarmes assure que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et que
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 2.$$

Solution (exercice 7) Énoncé

• Soit $n \geq 1$, on a :
$$\begin{aligned}S_{n+1}-S_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n+2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+2\sqrt{n+1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\end{aligned}$$
en utilisant la quantité conjuguée. On a de plus :
$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2} \geq 2\sqrt{n+1} \Longrightarrow \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Longrightarrow S_{n+1}-S_n \geq 0.$$
On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n\geq1} \text{ est croissante.}}$

• Soit $n \geq 1$, on a :
$$\begin{aligned}T_{n+1}-T_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+2\sqrt{n}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$
en utilisant la quantité conjuguée. On a de plus :
$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leq 2\sqrt{n+1} \Longrightarrow \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Longrightarrow T_{n+1}-T_n \leq 0.$$
On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (T_n)_{n\geq1} \text{ est décroissante.}}$

• Pour tout $n \geq 1$, on a : $T_n - S_n = 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$. Afin de lever l'indétermination, on utilise la quantité conjuguée et on obtient que : $T_n - S_n = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Ainsi par propriété sur les composée, somme et quotient de limites, on a : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n - S_n = 0.}$

Ainsi on vient de montrer que $\boxed{\text{les suites } (S_n)_{n\geq1} \text{ et } (T_n)_{n\geq1} \text{ sont adjacentes.}}$
D'après le théorème sur les suites adjacentes,
$\boxed{\text{les suites } (S_n)_{n\geq1} \text{ et } (T_n)_{n\geq1} \text{ convergent vers la même limite.}}$

Solution (exercice 8) Énoncé La seule chose que l'on puisse faire avec une partie entière est d'utiliser l'inégalité qui la détermine, à savoir que
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$$
avec $\lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$. On sait donc que, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a
$$\lfloor kx \rfloor \leqslant kx < \lfloor kx \rfloor + 1 \Longleftrightarrow kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx.$$
On somme alors cette inégalité pour k allant de 1 à n et on obtient que
$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leqslant \sum_{k=1}^{n} kx \Longleftrightarrow \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx$$

car $\frac{1}{n^2} > 0$. Calculons séparemment chaque somme :
$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) = \frac{x}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k - \frac{n}{n^2} = \frac{xn(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n}.$$
Un calcul similaire donne pour l'autre somme
$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}kx = \frac{xn(n+1)}{2n^2}.$$
On obtient alors que
$$\frac{x(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{x(n+1)}{2n}.$$
Or, on a
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{x(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} = \frac{x}{2} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{x(n+1)}{2n},$$
ainsi, le théorème des gendarmes assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge et que :
$$\boxed{\lim_{n\longrightarrow+\infty}u_n = \frac{x}{2}}.$$

Solution (exercice 9) Énoncé

1. Il s'agit ici d'étudier les variations des deux fonctions suivantes : $f : x \longmapsto x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ et $g : x \longmapsto \ln(1+x) - x$ et d'en déduire leur signe. à faire.
2. Une idée classique lorsque l'on doit étudier un produit est de le transformer en somme en passant au logarithme népérien. C'est ce que l'on va faire ici.
   - On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $S_n = \ln(p_n)$. Par propriété sur le logarithme d'un produit, on obtient que :
   $$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$
   - On encadre S_n en encadrant le terme à l'intérieur grâce à l'inégalité démontrée à la question précédente puis on somme. On obtient donc en posant $x = \frac{k}{n^2} > 0$ car $k \geq 1$:
   $$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leqslant \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2}.$$
   On somme alors cette inégalité pour k allant de 1 à n et on obtient, en utilisant la linéarité de la somme, que :
   $$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k - \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2 \leqslant{} & S_n \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\\ \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant{} & S_n \leqslant \frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$
   - En utilisant le théorème sur les monômes de plus haut degré, on remarque que :
   $$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2},\quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = 0.$$
   Ainsi en utilisant le théorème des gendarmes, on obtient que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers $\frac{1}{2}$.
   - Par définition de S_n, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $p_n = e^{S_n}$. Puis par propriété sur la composition de limite, on obtient que : $\lim_{n\longrightarrow+\infty}p_n = e^{\frac{1}{2}}$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (p_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ converge vers } e^{\frac{1}{2}}}$.

Solution (exercice 10) Énoncé Pour toutes ces suites, on conjecture le résultat en itérant la relation de récurrence puis on le démontre rigoureusement par récurrence. Je ne fais pas ici la récurrence mais elle doit être présente dans toute copie. Je ne donne ici que le résultat, à savoir u_n en fonction de n.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}}nu_1 = \boxed{\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}}n}$. Puis on prouve cette formule avec une récurrence.
2. - Méthode 1 : on conjecture que :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = 2\times 2^3\times 2^{3^2}\times\cdots\times 2^{3^{n-1}}u_0^{3^n} = 2^{\sum_{k=0}^{n}3^k} = 2^{\frac{3^{n+1}-1}{2}},$$
   puis on fait une récurrence.
   - Méthode 2 : par récurrence immédiate, la suite (u_n) est bien strictement positive, et donc (v_n) existe. En passant au logarithme dans la relation définissant (u_n), on déduit :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_{n+1} = \ln 2 + 3v_n.$$
   On en déduit que (v_n) est une suite arithmético-géométrique. La méthode habituelle donne ensuite v_n en fonction de n, puis $u_n = \frac{3}{2}\times\frac{3^n}{2} - \frac{1}{2}$, soit $\boxed{u_n = 2^{\frac{3^{n+1}-1}{2}}}$.

Solution (exercice 11) Énoncé

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 - u_{n+1} = 1 + u_n^2 - 2u_n = (1-u_n)^2$.
   On pose $v_n = 1 - u_n$. On a alors $v_{n+1} = v_n^2$. Essayons de calculer v_n : on a $v_1 = v_0^2$, $v_2 = v_0^4$, $v_3 = v_0^8$. On conjecture donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0^{2^n}$.
   Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_n = v_0^{2^n}$.

   Initialisation. pour $n = 0$ on a $v_0^{2^0} = v_0$. La propriété est vérifiée au rang zéro.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie à l'ordre n, montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$. On a vu que : $v_{n+1} = v_n^2$. On utilise alors l'hypothèse de récurrence et on obtient

$$v_{n+1} = \left(v_0^{2^n}\right)^2 = v_0^{2^{n+1}}.$$

Conclusion : il résulte du principe de récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0^{2^n}.$$

On obtient donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1-(1-u_0)^{2^n}$.

- Si $1-u_0 > 1 \iff u_0 < 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-u_0)^{2^n} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Si $u_0 = 0$, alors $1-u_0 = 1$ et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $-1 < 1-u_0 < 1 \iff 0 < u_0 < 2$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- Si $u_0 = 2$, alors $1-u_0 = -1$ et $(1-u_0)^{2^n} = 1$, et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $1-u_0 < -1 \iff u_0 > 2$, alors $(1-u_0)^2 > 1$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-u_0)^{2^n} = +\infty$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Solution (exercice 12) Énoncé

1. - La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale.
   - La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad f'(x) = \frac{3}{2}x - 2$.
   - On obtient ainsi les variations suivantes :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$	2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$ 2	$\nearrow$	$+\infty$

   - Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent avec le théorème du monôme de plus haut degré.
2. Le discriminant vaut $\Delta = 0$ et l'unique racine est 2. Ainsi :
   $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est positive sur } \mathbb{R} \text{ et ne s'annule qu'en } 2.}$
3. On suppose dans cette question que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ et par ailleurs la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale donc elle est en particulier continue en ℓ. Donc d'après le théorème sur les suite et fonction, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$. De plus on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. On peut donc passer à la limite dans l'égalité : $u_{n+1} = f(u_n)$ et on obtient que : $\ell = f(\ell)$. On a donc : $\ell = f(\ell) \iff g(\ell) = 0 \iff \ell = 2$.
   $\boxed{\text{La seule limite finie éventuelle est donc 2.}}$
4. **4.1)** On peut commencer par montrer que l'intervalle $]2,+\infty[$ est stable par f.
   On a f strictement croissante sur $[2,+\infty[$, et $f(2) = 2$. Donc pour tout $x \in [2,+\infty[, f(x) > 2$ et l'intervalle $]2,+\infty[$ est stable par f. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : u_n existe et $u_n > 2$.
   Initialisation. pour $n = 0$: par définition de la suite, u_0 existe et $u_0 > 2$.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété vraie à l'ordre n. Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n > 2$. Donc $f(u_n)$ existe c'est-à-dire u_{n+1} existe. De plus, l'intervalle $]2,+\infty[$ est stable par f. Donc $f(u_n) > 2$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 2$. La propriété est bien héréditaire.
   Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est bien définie et que pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 2.}$

   4.2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Ainsi comme le signe de g est positif sur $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

   4.3)
   - La suite (u_n) est croissante donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge ou elle diverge vers $+\infty$.
   - On suppose par l'absurde que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ. On a alors puisque la suite (u_n) est croissante, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq u_0$.
     D'après le théorème de passage à la limite, on obtient donc que : $\ell \geq u_0$. Or par hypothèse, on sait que $u_0 > 2$. Ainsi on obtient que : $\ell > 2$. Absurde car la seule limite éventuelle de la suite (u_n) est 2. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ diverge vers } +\infty.}$
5. **5.1)** On peut commencer par montrer que l'intervalle $\left]\frac{2}{3},2\right[$ est stable par f. Attention, ici f n'est pas monotone sur $\left]\frac{2}{3},2\right[$, il faut donc traiter les deux intervalles $\left]\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$ et $\left]\frac{4}{3},2\right]$ séparemment.
   Sur $\left]\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$, f est strictement décroissante et $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$, $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$. Donc pour tout $x \in \left]\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$, $f(x) \in \left]\frac{5}{3},2\right]$, donc $f(x) \in \left]\frac{2}{3},2\right[$.
   Sur $\left]\frac{4}{3},2\right]$, f est strictement croissante et $f(2) = 2$, $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$. Donc pour tout $x \in \left]\frac{4}{3},2\right]$, $f(x) \in \left]\frac{5}{3},2\right]$, donc $f(x) \in \left]\frac{2}{3},2\right[$.

En en déduit que pour tout $x \in \left]\frac{2}{3},2\right[$, on a bien $f(x) \in \left]\frac{2}{3},2\right[$: l'intervalle $\left]\frac{2}{3},2\right[$ est stable par f.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété « u_n existe et $u_n \in \left]\frac{2}{3},2\right[$. »

Initialisation. pour $n = 0$: par définition de la suite, u_0 existe et $u_0 \in \left]\frac{2}{3},2\right[$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que la propriété vraie à l'ordre n, montrons là au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, on sait que u_n existe et que $u_n \in \left]\frac{2}{3},2\right[$. Donc $f(u_n)$ existe c'est-à-dire u_{n+1} existe. De plus, $u_n \in \left]\frac{2}{3},2\right[$. Or l'intervalle $\left]\frac{2}{3},2\right[$ est stable par f. Donc $f(u_n) \in \left]\frac{2}{3},2\right[$ c'est-à-dire $u_{n+1} \in \left]\frac{2}{3},2\right[$.

Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est bien définie et que pour tout } n \in \mathbb{N},\quad u_n \in \left]\frac{2}{3},2\right[.}$

5.2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Ainsi comme le signe de g est positif sur $\mathbb{R}$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

5.3)
- La suite (u_n) est croissante et majorée par 2 donc d'après le théorème sur les suites monotones, elle converge.
- Comme la seule limite éventuelle est 2, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers 2.}}$

Solution (exercice 13) Énoncé

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $a_{n+1} + b_{n+1} = -2a_n + b_n + 3a_n = a_n + b_n$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}}$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n + b_n = a_0 + b_0 = 1$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = 1.}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, en utilisant le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 1$, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = 1 - a_n$. Ainsi on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$a_{n+1} = -2a_n + b_n \iff a_{n+1} = 1 - 3a_n.$$
On reconnaît une suite arithmético-géométrique. En appliquant la méthode du cours, on obtient :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{4}\left(1 - (-3)^n\right).}$$
3. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $b_{n+1} = 3a_n$, on a : $b_n = 3a_{n-1}$. Puis en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \frac{3}{4}\left(1 - (-3)^{n-1}\right).}$

Solution (exercice 14) Énoncé

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :
$$w_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{12} = \frac{1}{12}w_n.$$
Ainsi la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et de premier terme $w_1 = v_1 - u_1 = 11$. On en déduit donc l'expression explicite de w_n :
$$\boxed{\forall n \geq 1,\ w_n = w_1\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 11\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}.}$$
2.
   - Étude de la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$: soit $n \geq 1$, on a :
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} - u_n = \frac{2(v_n - u_n)}{3} = \frac{2}{3}w_n.$$
   Or on connaît l'expression de w_n, on obtient donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3} \times 11\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \geq 0.$$
   Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante.
   - Étude de la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$:
   Soit $n \geq 1$, on a :
   $$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} = \frac{-1}{4}w_n.$$
   Or on connaît l'expression de w_n, on obtient donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = \frac{-11}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \leqslant 0.$$
   Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante.
   - Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$:
   On a montré à la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $v_n - u_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$. Comme : $-1 < \frac{1}{12} < 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 0$. Puis par propriété sur le produit de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

   Ainsi, on a donc montré que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont adjacentes. D'après le théorème sur les suites adjacentes, $\boxed{\text{elles convergent donc vers la même limite.}}$
3.
   - Expression de t_n pour tout $n \geq 1$:
   Soit $n \geq 1$, on a : $t_{n+1} = 3\frac{u_n + 2v_n}{3} + 8\frac{u_n + 3v_n}{4} = 3u_n + 8v_n = t_n$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est constante égale à } t_1 = 3u_1 + 8v_1 = 99.}$
   - Calcul de la valeur de la limite ℓ :

Comme la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est constante, on a : $\forall n\in\mathbb{N}^\star$, $3u_n+8v_n=99$. De plus on a démontré à la question 2 que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ convergent vers la même limite ℓ et ainsi par propriété sur les produits et somme de limites, on obtient que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(3u_n+8v_n)=11\ell$. Par passage à la limite dans l'égalité : $3u_n+8v_n=99$, on obtient donc que

$$11\ell=99 \iff \boxed{\ell=9.}$$

4. **4.1)** À l'aide de la formule du cours, on a $\boxed{P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-3}{11} & \frac{3}{11}\\ \frac{3}{11} & \frac{8}{11}\end{pmatrix}}$ et P est inversible car de déterminant $11\neq 0$.

4.2) On a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac13 u_n+\frac23 v_n\\ v_{n+1} &= \frac14 u_n+\frac34 v_n\end{cases} \iff X_{n+1}=AX_n,\quad \text{avec : } A=\begin{pmatrix}\frac13 & \frac23\\ \frac14 & \frac34\end{pmatrix}.$$

On a : $\boxed{X_n=A^{n-1}X_1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$.

4.3) Après calculs, on trouve $D=\begin{pmatrix}\frac{1}{12} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. On a de plus : $\boxed{A^n=PD^nP^{-1}}$.

4.4) On a $X_1=\begin{pmatrix}1\\12\end{pmatrix}$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned} u_n &= (X_n)_{1,1}\\ &= \left(P\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}P^{-1}X_1\right)_{1,1}\\ &= \left(\begin{pmatrix}\frac{-8}{3} & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-3}{11} & \frac{3}{11}\\ \frac{3}{11} & \frac{8}{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\12\end{pmatrix}\right)_{1,1}\\ &= \frac{3}{11}+\frac{1}{11}2^{5-2n}3^{1-n}+12\times\left(\frac{8}{11}-\frac{1}{11}2^{5-2n}3\right. \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3+12\times 8}{11}=\frac{99}{11}=\boxed{9}.$$

Solution (exercice 15) Énoncé

1. La fonction $\tan^n$ est bien continue sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ donc I_n est bien définie. De plus,

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,dt=\boxed{\frac{\pi}{4}},$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan(t)\,dt=\left[-\ln|\cos t|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=0-\ln\left|\frac{\sqrt2}{2}\right|=\boxed{\frac12\ln 2}$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2(t)\,dt$$

$$=$$

2. **2.1)** Soit $n\in\mathbb{N}$, alors $\tan\geqslant 0$ sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, donc :

$$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right],\quad \tan^n(t)\geqslant 0\implies \boxed{I_n\geqslant 0.}$$

2.2) La suite (I_n) est donc positive, analysons à présent sa monotonie. Soit $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_{n+1}-I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+1}(t)\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(t)\,dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(t)\times(\tan(t)-1)\,dt\\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

La suite (I_n) est donc décroissante, et minorée vers 0 donc $\boxed{\text{converge}}$.

Solution (exercice 16) Énoncé

1. On a $u_0=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt=\arctan(1)-\arctan(0)=\boxed{\frac{\pi}{4}}$. De-même, par calcul direct, $u_1=\displaystyle\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\,dt=\frac12\left[\ln|1+t^2|\right]_0^1=\boxed{\frac{\ln 2}{2}}$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors

$$\forall t\in[0,1],\quad 0\leqslant\frac{t^n}{1+t^2}\leqslant\frac{t^n}{1+0}.$$

Donc en intégrant entre 0 et 1, on déduit que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant u_n\leqslant\int_0^1\frac{t^n}{1+0}\,dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}.$$

Donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\boxed{\leq u_n\leq\frac{1}{n+1}}.$$

3. Par théorème des gendarmes, comme $\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, on obtient $\boxed{u_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0}$.

Solution (exercice 17) Énoncé

1. On a :
$$\begin{aligned}\mathrm{I}_0 &= \int_1^{\mathrm{e}} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{\mathrm{e}}\\ &= \boxed{\frac{\mathrm{e}^3}{3}},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1 &= \int_1^{\mathrm{e}} \underbrace{x^2}_{:=v'(x)} \underbrace{\ln(x)}_{:=u(x)}\mathrm{d}x\\ &= -\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^{\mathrm{e}}\\ &= -\frac{1}{9}\left[x^2\right]_1^{\mathrm{e}} + \frac{\mathrm{e}^3}{3}\end{aligned}$$
2. Sur $[1,\mathrm{e}]$, on a $\ln(x) \in [0,1]$ pour tout $x \in [1,\mathrm{e}]$, donc :
$$\forall x \in [1,\mathrm{e}],\quad 0 \leqslant \ln^{n+1}(x) \leqslant \ln^n(x) \leqslant 1.$$
Donc en multipliant par x^2 qui est bien positif, on déduit :
$$\forall x \in [1,\mathrm{e}],\quad 0 \leqslant x^2\ln^{n+1}(x) \leqslant x^2\ln^n(x) \leqslant 1.$$
Puis en intégrant : $0 \leqslant \mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n$. Ainsi la suite (I_n) décroît et est minorée par zéro donc $\boxed{\text{converge}}$.
3. Notons $f : x \in [1,\mathrm{e}] \longmapsto \ln(x) - \dfrac{x}{\mathrm{e}}$. Alors f est dérivable sur son domaine de définition, et $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \geqslant 0$ puisque $x \leqslant \mathrm{e}$ sur le domaine considéré. Ainsi, f est décroissante, donc pour tout $x \in [1,\mathrm{e}]$, $f(x) \leqslant f(\mathrm{e}) = 0$. Ainsi, f est négative, on a donc bien établi :
$$\boxed{\forall x \in [1,\mathrm{e}],\quad 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \frac{x}{\mathrm{e}}}.$$
On intègre alors la relation précédente, après l'avoir élevée à la puissance n (encadrement positif), puis multipliée par x^2 (qui est positif), on obtient :
$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n x^2\,\mathrm{d}x.$$
Mais,
$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{x}{\mathrm{e}}\right)^n x^2\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\mathrm{e}^n}\int_1^{\mathrm{e}} x^{n+2}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^n}\left(\frac{\mathrm{e}^{n+3}}{n+3} - \frac{1}{n+3}\right)\\ &= \frac{\mathrm{e}^3}{n+3} - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$
On a donc par théorème d'encadrement, que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{I}_n = 0.}$

4. Faisons une intégration par parties, comme nous l'avons faite pour I_1.
$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{n+1} &= \int_1^{\mathrm{e}} \underbrace{x^2}_{:=v'(x)} \underbrace{\ln^{n+1}(x)}_{:=u(x)}\mathrm{d}x\\ &= -\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}(n+1)\ln^n(x)\,\mathrm{d}x + \left[\frac{x^3}{3}\ln^{n+1}(x)\right]_1^{\mathrm{e}}\\ &= -\frac{n+1}{3}\mathrm{I}_n + \frac{\mathrm{e}^3}{3}.\end{aligned}$$
Donc :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad \mathrm{I}_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{n+1}{3}\mathrm{I}_n}.$$

Solution (exercice 18) Énoncé

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose : $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \longmapsto f_n(x) = x^n + x - 1$. Cette fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme fonction polynôme. De plus, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\quad f_n'(x) = nx^{n-1} + 1.$$
Ainsi, sur $\mathbb{R}^+$, la fonction f_n' est toujours positive comme somme de deux nombres positifs et la fonction f_n est croissante sur $\mathbb{R}^+$. On applique alors le théorème de la bijection sur $\mathbb{R}^+$. En effet, on a
   - f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$
   - f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
   - $f_n(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

   Ainsi, d'après le théorème de la bijection, il existe une unique solution sur $\mathbb{R}^+$ à l'équation $f_n(x) = 0$.
2. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n(1) = 1 > 0$. En réappliquant alors le théorème de la bijection sur $[0,1]$, on obtient que : $x_n \in]0,1[$ et cela pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est majorée par } 1.}$
3. Pour étudier la monotonie de la suite, on doit trouver le signe de $f_n(x_{n+1})$. Soit donc $n \geqslant 1$:
$$\begin{aligned}f_n(x_{n+1}) &= x_{n+1}^n + x_{n+1} - 1\\ &\geqslant x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1\\ &= f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 = f_n(x_n).\end{aligned}$$
Or, la fonction f_n est strictement croissante et $f_n(x_{n+1}) \geqslant f_n(x_n)$ donc $x_{n+1} \geqslant x_n$ et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star} \text{ est croissante}}$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante et majorée par 1, ainsi elle converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ d'après le théorème sur les suites monotones. De plus, un passage à la limite dans l'inégalité : $x_n \in]0,1[$ donne que ℓ vérifie, comme la suite converge vers ℓ : $0 \leqslant \ell \leqslant 1$. On suppose par l'absurde que $\ell < 1$. Comme

la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante et majorée, le théorème des suites monotones nous dit aussi que la suite vérifie :

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\quad x_n\leqslant \ell.$$

Ainsi, on obtient, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$ que : $0\leqslant x_n^n\leqslant \ell^n$. Or, par hypothèse, on a : $\ell<1$, ainsi, on sait que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\ell^n=0$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on sait que la suite $(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 0. De plus, par définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, on sait que

$$\forall n\in\mathbb{N}^\star,\quad x_n^n+x_n-1=0.$$

Les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont convergentes, on peut donc passer à la limite en faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité ci-dessus. On obtient en utilisant l'unicité de la limite : $0+\ell-1=0$. Ainsi, on obtient $\ell=1$. Contradiction car on a supposé que $\ell<1$.

5. Finalement, on obtient bien que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 1. En effet, on sait que $\ell\in[0,1]$ et on a vu que $\ell<1$ est impossible. Donc $\boxed{\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}x_n=1}$.

Solution (exercice 19) Énoncé

1. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$, on pose : $f_n : x\in\mathbb{R}\longrightarrow f_n(x)=nx^3+n^2x-2$. Cette fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme. De plus, on a

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_n'(x)=3nx^2+n^2.$$

Ainsi, sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n' est toujours positive comme somme de deux nombres positifs et la fonction f_n est croissante sur $\mathbb{R}$. On applique alors le théorème de la bijection sur $\mathbb{R}^+$. En effet, on a :

- f_n est continue sur $\mathbb{R}$,
- f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}f_n(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f_n(x)=+\infty$.

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$ à l'équation $f_n(x)=0$.

2. On remarque que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $f_n(0)=-2<0$. Ainsi, en réappliquant le théorème de la bijection sur $\mathbb{R}^+$, on obtient que : $a_n>0$.

3. Pour étudier la monotonie de la suite, on doit trouver par exemple le signe de $f_{n+1}(a_{n+1})$.

$$\begin{aligned}f_{n+1}(a_n)&=(n+1)a_n^3+(n+1)^2a_n-2\\&=f_n(a_n)+\left(a_n^3+(2n+1)a_n\right)\\&=0+a_n^3+(2n+1)a_n\\&\geqslant 0=f_{n+1}(a_{n+1}).\end{aligned}$$

Or, f_{n+1} est strictement croissante, donc $a_n\geqslant a_{n+1}$ et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est donc $\boxed{\text{décroissante}}$.

4. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers une limite finie $\ell\in\mathbb{R}$ d'après le théorème sur les suites monotones. Et un passage à la limite donne : $\ell\geq 0$.

Supposons par l'absurde que $\ell>0$. Par définition de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$, on sait que, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on a :

$$na_n^3+n^2a_n-2=0\iff na_n^3+n^2a_n=2.$$

Si $\ell>0$, alors le terme de droite de l'égalité ci-dessus tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini. Contradiction car il est constant égal à 2. Ainsi, on vient de montrer que : $\ell=0$. Donc la suite $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}\text{ converge vers } 0}$.