Devoir maison n°6
à rendre le Jeudi 01/02/2024

Consignes

- Les devoirs maison sont facultatifs. Pour autant, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$ proprement, <u>soulignés</u> ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Il est rappelé également que recopier une correction sur internet <u>est complètement inutile pour tout le monde.</u>**

Exercice 1 | Une suite récurrente linéaire d'ordre 3 Solution

On se propose d'étudier la suite réelle récurrente linéaire **d'ordre 3** $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

On pose $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer X_0 et X_1.

2. **2.1)** Justifier pour tout entier naturel n, l'égalité : $X_{n+1} = AX_n$.

2.2) En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

3. Soit P, Q et T les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix},\quad Q = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1) Calculer le produit PQ.
En déduire que la matrice P est inversible et déterminer sa matrice inverse P^{-1}.

3.2) Calculer le produit PTP^{-1}.

3.3) Montrer alors par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = PT^nP^{-1}$.

4. Soit D la matrice définie par : $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = T - D$.

4.1) Donner la matrice N et calculer N^2.

4.2) Déterminer pour tout entier $k \geq 2$, la matrice N^k.

4.3) Calculer DN et ND.

4.4) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.5) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice A^n.

5. **5.1)** Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n.

5.2) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 2 |

On considère une matrice représentée en langage Python par un tableau à 2 dimensions.

Les éléments `M[i,j]`, correspondant aux coefficients de la matrice, sont égaux soit à 0 soit à 1.

On appelle **composante** d'une matrice un sous-ensemble de celle-ci constitué uniquement de 1 et de 0 qui sont côte à côte, soit horizontalement soit verticalement.

Par exemple la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a 8 composantes représentées ci-dessous :

0	0	1	0
0	1	0	1
1	1	1	0
0	1	1	0

On souhaite, à partir d'un coefficient en position (i,j) valant 1 dans une matrice M donner la valeur souhaitée v à tous les coefficients de sa composante.

Écrire une fonction **récursive** `propager` prenant pour paramètres un tableau représentant une matrice M, deux entiers i et j et une valeur entière v et qui modifie le tableau M en propageant la valeur v aux coefficients de la composante du coefficient en position (i,j).

Par exemple, `propager(M,2,1,3)` renvoie le tableau

0	0	1	0
0	3	0	1
3	3	3	0
0	3	3	0

Solution (exercice 1) Énoncé

1. On a $\boxed{X_0} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$.

De plus, $u_3 = 2u_2 - \frac{5}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_0 = 2$, donc $\boxed{X_1} = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$.

2. 2.1) Les relations $\begin{cases} u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} = u_{n+2} \\ u_{n+1} = u_{n+1} \end{cases}$ s'écrivent matriciellement sous la forme

$$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix},$$ c'est-à-dire $\boxed{X_{n+1} = AX_n}$ puisque

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

2.2) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n) : X_n = A^n X_0$.

Initialisation. $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$ de sorte que $X_n = A^n X_0$. Puisque $X_{n+1} = AX_n$, on a alors $X_{n+1} = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0$.

D'où le résultat par le principe de récurrence.

3. 3.1) On trouve

$$\boxed{PQ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{4I_3}.$$

On en déduit que $P \times \frac{1}{4}Q = \frac{1}{4}PQ = I_3$, ce qui montre que $\boxed{\text{P est inversible}}$, avec $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{4}Q}$.

3.2) On trouve

$$PT = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

puis $$PTP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

On obtient que $\boxed{A = PTP^{-1}}$.

3.3) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{H}(n) : A^n = PT^nP^{-1}$.

Initialisation. $PT^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$, donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathscr{H}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$, de sorte que $A^n = PT^nP^{-1}$. On en déduit que
$$A^{n+1} = A^nA = (PT^nP^{-1})(PTP^{-1}) = PT^n(P^{-1}P)TP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$$
car $P^{-1}P = I_3$.

D'où le résultat par le principe de récurrence.

4. 4.1) On a que $\boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$. On trouve $\boxed{N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

4.2) Pour tout entier $k \geq 2$, $\boxed{N^k} = N^2 \times N^{k-2} = 0 \times N^{k-2} = \boxed{0}$ (matrice nulle).

4.3) On trouve $\boxed{DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND}$.

4.4) De $N = T - D$, on déduit $T = D + N$. Puisque $DN = ND$ (D et N *commutent*), la formule du binôme donne, pour tout entier $n \geq 2$,

$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k}N^k$. Puisque, pour tout $k \geq 2$, $N^k = 0$, la somme se réduit aux termes correspondant à $k = 0$ et à $k = 1$.

Puisque $\binom{n}{0}D^nN^0 = D^n$, et $\binom{n}{1}D^{n-1}N = nD^{n-1}N$, on a

$\boxed{T^n = D^n + nD^{n-1}N}$.

D étant diagonale, on a

$$D^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \underline{\textbf{et}}\ D^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où $D^{n-1}N = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Il vient :

$$\boxed{T^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

On voit (remplacer n par 0, puis par 1) que la formule est aussi vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq 0$.

4.5) Soit $n \in \mathbb{N}$. On trouve

$$PT^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix}$$

puis

$$\boxed{A^n} = PT^nP^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4\times 2^n - n - 3 & \frac{3}{2}n - 4\times 2^n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4\times 2^n - 2n - 4 & 3n - 4\times 2^n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4\times 2^n - 4n - 4 & 6n - 4\times 2^n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix}}$$

5. 5.1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On obtient u_n en calculant le vecteur colonne X_n par la formule $X_n = A^n X_0$. Comme $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient X_n en recopiant simplement la première colonne de A^n. Ainsi, $X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4\times 2^n - n - 3 \\ 4\times 2^n - 2n - 4 \\ 4\times 2^n - 4n - 4 \end{pmatrix}$ et en particulier, puisque $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$:

$$\boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (4\times 2^n - 4n - 4)}.$$

5.2) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 4 - \frac{4n}{2^n} - \frac{4}{2^n}$.

On en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 4}$ (par somme et croissances comparées).

Solution (exercice 2) [Énoncé]

```python
import numpy as np

Mtest = np.array([[0,0,1,0],[0,1,0,1],[1,1,1,0],[0,1,1,0]])

def propager(M,i,j,v) :
    n = np.shape(M)[0]
    if M[i,j] == 0 :
        return M
    else :
        M[i,j] = v
        # le coefficient au-dessus fait partie de la composante
        if i-1>=0 and M[i-1,j] == 1 :
            propager(M,i-1,j,v)
        # le coefficient en-dessous fait partie de la \
        ↪ composante
        if i+1<n and M[i+1,j] == 1 :
            propager(M,i+1,j,v)
        # le coefficient à gauche fait partie de la composante
        if j-1>=0 and M[i,j-1] == 1 :
            propager(M,i,j-1,v)
        # le coefficient à droite fait partie de la composante
        if j+1<n and M[i,j+1] == 1 :
            propager(M,i,j+1,v)
```