

Devoir sur table # 5

10/02/2024 – Durée : 2h00

Consignes. Le sujet est constitué de deux pages. Les deux exercices sont indépendants.

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

Il est demandé de soigneusement numéroté les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les encadrant, en les surlignant ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction. L'usage de la calculatrice est strictement **interdit**.

Les abus suivants entraînent la note de $\boxed{0/4}$ en rédaction :

- variables non quantifiées (Ce n'est pas au correcteur de deviner qui est x ou qui est n !) ,
- confusion entre égalité = et équivalence $\Longleftrightarrow$,
- écrire « la fonction $f(x)$ » ou écrire $f'(x)$ sans avoir justifié la dérivabilité,
- un excès de phrases sans sens.

Exercice 1 | Étude d'une famille de matrices. Solution

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose : $J(a, b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

PARTIE I — PUISSANCES DE $J(a, b)$ SELON DEUX MÉTHODES. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Donner $J(0, 0)$ et $J(1, -3)$.
2. Calculer $J(a, b)^2$, $J(a, b)^3$ et $J(a, b)^4$.
3. Conjecturer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une formule pour $J(a, b)^n$, puis la démontrer.
4. On suppose dans cette question uniquement que $a = b$. Retrouver l'expression de $J(a, a)^n$ précédente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en utilisant la formule du binôme matriciel.

Indication : On pourra introduire la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTIE II — ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTÉ LINÉAIRE D'ORDRE 3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre 3 suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 0, & u_1 = 0, & u_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+3} = -u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n. \end{cases}$$

Le but de cette partie est de déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cette partie fait appel aux résultats de la partie précédente.

5. On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

- 5.1) Déterminer X_0 et X_1 .
- 5.2) Justifier pour tout entier naturel n , l'égalité : $X_{n+1} = AX_n$.
- 5.3) En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.

6. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

- 6.1) Calculer le produit PQ . En déduire que la matrice P est inversible et déterminer sa matrice inverse P^{-1} .
- 6.2) Montrer que : $A = P \times J(1, -3) \times P^{-1}$.
- 6.3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \times (J(1, -3))^n \times P^{-1}$.
- 6.4) À l'aide des questions précédentes, déterminer l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 2 | Etude d'une suite récurrente. [Solution]

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in]0, 1[, \quad \text{et : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

PARTIE I — ÉTUDE DE LA NATURE DE $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x - x^2$.
2. **2.1)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$.
- 2.2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- 2.3) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- 2.4) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

PARTIE II — DÉTERMINATION D'UN ÉQUIVALENT DE $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Dans cette partie, on pourra librement utiliser le théorème de CESÀRO :

Théorème de Cesàro

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ est aussi convergente, de limite ℓ .

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}}$.

3. **3.1)** Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$. *Indication : Utilisez à bon escient la relation de récurrence définissant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*
- 3.2) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \right) = 1$.
- 3.3) En déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n u_n} = 1$. Donner alors un équivalent simple de u_n .
4. Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(5u_n)}{e^{2u_n} - 1}$.

PARTIE III — ÉTUDE DE SUITES ADJACENTES.

Considérons la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

5. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
6. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (*on ne cherchera pas à déterminer sa limite*).



Ernesto CESÀRO (1859 - 1906), mathématicien italien du XIX^{ème} siècle, qui vous regarde depuis là-haut 🙄🙄

Correction

Devoir surveillé n° 5

10/02/2024 – Durée : 2h00

Solution (exercice 1) Énoncé

PARTIE I – PUISSANCES DE $J(a, b)$ SELON DEUX MÉTHODES

1. $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J(1, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

2. On obtient : $J(a, b)^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2a & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$, $J(a, b)^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & b^3 \end{pmatrix}$

et $J(a, b)^4 = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 & 0 \\ 0 & a^4 & 0 \\ 0 & 0 & b^4 \end{pmatrix}$

3. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n) : J(a, b)^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$.

Initialisation. $\begin{pmatrix} a^1 & 1a^{1-1} & 0 \\ 0 & a^1 & 0 \\ 0 & 0 & b^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = J(a, b)^1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}^*$, de sorte que

$J(a, b)^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$. Alors :

$J(a, b)^{n+1} = J(a, b)^n \times J(a, b)$

$$= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{hypothèse de récurrence}$$

$$= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n & 0 \\ 0 & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, J(a, b)^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$.

4. Notons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors on vérifie sans difficulté que $N^2 = 0_{3,3}$. Et de plus,

$J(a, b) = aI_3 + N$ avec aI_3 , et N qui commutent. Donc pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} J(a, b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k (aI_3)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} N^k (aI_3)^{n-k} \\ &= (aI_3)^n + na^{n-1}N \\ &= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

PARTIE II – ÉTUDE D'UNE SUITE RÉCURRENTÉ LINÉAIRE D'ORDRE 3

5. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

5.1) $X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_1 = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$, sachant que

$$u_3 = -u_2 + 5u_1 - 3u_0 = -1 + 5 \times 0 - 3 \times 0 = -1.$$

donc : $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5.2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Après calculs, on a :

$$AX_n = \begin{pmatrix} -u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$

5.3) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n) : X_n = A^n X_0$.

Initialisation. Comme $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$, la propriété $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$ de sorte que $X_n =$

$A^n X_0$. Alors :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= AA^n X_0 \quad \text{hypothèse de récurrence} \\ &= A^{n+1} X_0. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

On a donc par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{X_n = A^n X_0}$.

6. 6.1) On constate après calculs que $PQ = 16I_3$ donc :

$$\boxed{P \text{ est bien inversible d'inverse } P^{-1} = \frac{1}{16}Q.}$$

6.2) On rappelle que l'on a : $J(1, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$

Après calculs : $PJ(1, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -27 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

Puis : $PJ(1, -3)Q = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -27 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 80 & -48 \\ 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \end{pmatrix}$

D'où :

$$PJ(1, -3)P^{-1} = \frac{1}{16}PJ(1, -3)Q = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -16 & 80 & -48 \\ 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

On obtient bien que : $\boxed{A = P \times J(1, -3) \times P^{-1}}.$

6.3) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}(n) : A^n = P \times (J(1, -3))^n \times P^{-1}$.

Initialisation. Comme $P(J(1, -3))^0 P^{-1} = PP^{-1} = I_3$, la propriété est initialisée.

Hérédité. Supposons $\mathcal{R}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$ de sorte que $A^n = P \times (J(1, -3))^n \times P^{-1}$. Alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= P \times (J(1, -3))^n \times P^{-1} \times P \times J(1, -3) \times P^{-1} \\ &= P(J(1, -3))^n \times J(1, -3)P^{-1} \quad \text{hypothèse de récurrence} \\ &= P(J(1, -3))^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie.

On a donc établi par principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{A^n = P \times (J(1, -3))^n \times P^{-1}}.$$

6.4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente,

$$X_n = A^n X_0$$

$$= P \times (J(1, -3))^n \times P^{-1} X_0$$

$$= \frac{1}{16} P \times (J(1, -3))^n Q X_0,$$

avec $(J(1, -3))^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$ (cette formule a été démontrée en question 3

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et est aussi valable lorsque $n = 0$)

Allons-y pour le calcul de $\frac{1}{16} P \times (J(1, -3))^n Q X_0$.

On a : $QX_0 = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Puis : $(J(1, -3))^n QX_0 = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 4n \\ 4 \\ (-3)^n \end{pmatrix}.$

Et : $P(J(1, -3))^n QX_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 + 4n \\ 4 \\ (-3)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4n + 7 + 9(-3)^n \\ 4n + 3 + (-3)^{n+1} \\ 4n - 1 + (-3)^n \end{pmatrix}.$

Enfin : $X_n = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4n + 7 + 9(-3)^n \\ 4n + 3 + (-3)^{n+1} \\ 4n - 1 + (-3)^n \end{pmatrix}.$

Le réel u_n étant le dernier coefficient de la matrice X_n , on trouve finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{16}((-3)^n + 4n - 1)}.$$

Solution (exercice 2) Énoncé

1. f est dérivable sur $[0, 1]$ en tant que somme de telles fonctions, et :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'(x) = 1 - 2x.$$

On en déduit le tableau de variations de f suivant.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{4}$	$\searrow$ 0	

2. 2.1) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : u_n \in]0, 1[.$

Initialisation. $u_0 \in]0, 1[$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour n fixé dans $\mathbb{N}$ de sorte que $u_n \in]0, 1[$.

Remarquons que, par définition de la suite, on a $u_{n+1} = f(u_n)$

Or, le tableau de variations de la question précédente fournit :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f(x) \in \left]0, \frac{1}{4}\right].$$

Ayant $u_n \in]0, 1[$, on obtient $f(u_n) \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$, donc $u_{n+1} \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$.

A fortiori : $u_{n+1} \in]0, 1[$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

D'où le résultat par le principe de récurrence.

Remarque 1 On aurait pu aussi remarquer, pour l'hétéridé, que $u_{n+1} = \underbrace{u_n}_{\in]0, 1[} \underbrace{(1 - u_n)}_{\in]0, 1[}$: cela permet d'obtenir une autre démonstration par récurrence un peu plus rapide.

2.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -u_n^2$.

Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ (un carré étant positif).

On en déduit que : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante

2.3) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 : d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

2.4) En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, on obtient : ce qui donne $\ell^2 = 0$ puis $\ell = 0$. Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

3. 3.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}} \\ &= \frac{u_{n-1} - u_n}{u_n u_{n-1}} \\ &= \frac{u_{n-1} - (u_{n-1} - u_{n-1}^2)}{(u_{n-1} - u_{n-1}^2) u_{n-1}} \quad \left(\text{car } u_n = u_{n-1} - u_{n-1}^2 \right) \\ &= \frac{u_{n-1}^2}{(1 - u_{n-1}) u_{n-1}^2} \\ &= \frac{1}{1 - u_{n-1}}. \end{aligned}$$

Puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n-1} = 0$, par opérations sur les limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - u_{n-1}} = 1.$$

On obtient bien : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

3.2) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$.

Puisque (a_n) converge vers 1, d'après le théorème de Cesaro, la suite (c_n) converge et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k-1}} \right) \quad \left(\text{Somme télescopique} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \right). \end{aligned}$$

On obtient alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \right) = 1$

3.3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{1}{nu_n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \right) + \frac{1}{nu_0}.$$

Or : $\begin{cases} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \right) = 1 \text{ (par la question précédente)} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_0} = 0, \end{cases}$

Ainsi, par somme de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n} = 1 + 0 = 1$.

Puisque $1 \neq 0$ (limite non nulle), on obtient alors : $\frac{1}{nu_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.

Donc (par inversion d'équivalents) : $nu_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$, et : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

4. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5u_n = 0$, on a : $\sin(5u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 5u_n$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3u_n = 0$, on a : $e^{3u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3u_n$.

Par quotient d'équivalents :

$$\begin{aligned} \frac{\sin(5u_n)}{e^{2u_n} - 1} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{5u_n}{2u_n} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(5u_n)}{e^{2u_n} - 1} = \frac{5}{2}$

5. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = S_{2n}$ et $V_n = S_{2n+1}$. Montrons que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= S_{2(n+1)} - S_{2n} \\ &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+1}. \end{aligned}$$

Or, la suite (u_n) est décroissante donc $u_{2n+2} \leq u_{2n+1}$.

Ainsi, $U_{n+1} - U_n \leq 0$ et la suite (U_n) est décroissante. En outre,

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} \\ &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= (-1)^{2n+3} u_{2n+3} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} \\ &= u_{2n+2} - u_{2n+3}. \end{aligned}$$

Or, la suite (u_n) est décroissante donc $u_{2n+2} \geq u_{2n+3}$.

Ainsi, $V_{n+1} - V_n \geq 0$ et la suite (V_n) est croissante.

Enfin, on a :

$$V_n - U_n = S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = -u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Toutes les hypothèses sont vérifiées :

Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

- 6.** Par le théorème des suites adjacentes, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite, notée S_∞ .

Ainsi, les suites extraites de rang pair et de rang impair de la suite (S_n) convergent vers S_∞ .

Cela implique que la suite (S_n) est convergente de limite S_∞ .