Chapitre # (AN) 7 — Compléments sur la continuité et la dérivation

1 Compléments sur la continuité
2 Grands théorèmes sur les fonctions continues
3 Compléments de dérivation
4 Grands théorèmes sur les fonctions dérivables
5 Exercices

Résumé & Plan

Ce chapitre vient compléter les notions de continuité et dérivabilité déjà rencontrées. On complète la continuité (notamment avec le théorème des valeurs intermédiaires) ainsi que la dérivation (avec les « grands » théorèmes, comme celui de ROLLE, des accroissements finis, *etc.*).

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

1. COMPLÉMENTS SUR LA CONTINUITÉ

On reprend quelques généralités sur les fonctions continues, avant d'y ajouter quelques grands théorèmes.

Remarque 1 Tous les résultats sont énoncés pour des fonctions définies sur un intervalle I. Ils s'étendent sans difficulté aux fonctions définies sur une réunion d'intervalles disjoints ; on regarde alors la restriction de la fonction à l'unique intervalle contenant le point d'étude de la continuité.

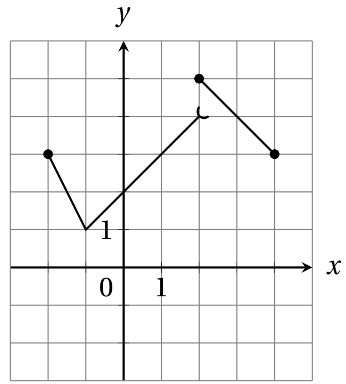
1.1. Généralités : rappels & compléments

Définition 1 | Continuité en un point
Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. On dit que f est continue en x_0 si elle admet une limite finie en x_0. Sachant qu'on a montré que si la limite en x_0 existe, alors elle vaut $f(x_0)$, on obtient la définition suivante :

On dit que f est *continue en* x_0 si : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Attention
On parle de continuité en un point de **l'ensemble de définition**, puisque $x_0 \in \mathrm{I}$ dans la définition précédente. La question ne se pose donc même pas en les points qui ne sont pas dans l'ensemble de définition.

Exemple 1 Considérons le graphe suivant d'une fonction f :



1.2. Continuité à droite et à gauche

Définition 2 | Continuité à droite, continuité à gauche

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$. On dit que :

- f est continue à gauche en x_0 si : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$,
- f est continue à droite en x_0 si : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Exemple 2 Dans l'exemple graphique précédent,

Proposition 1 | Continuité, à gauche et à droite

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0. Alors :

$$\begin{aligned} f \text{ est continue en } x_0 &\iff f \text{ est continue à droite et à gauche en } x_0 \\ &\iff \lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0). \end{aligned}$$

Note *Attention : puisqu'ici la fonction f est définie en x_0 , il ne faut pas oublier l'égalité à $f(x_0)$.*

Preuve Conséquence directe de la proposition qui fait le lien entre limite à droite et limite à gauche.

Exemple 3 Considérons $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array} \right.$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. La fonction f est-elle continue à droite en k ? Continue à gauche en k ? Continue à gauche en k ?

Exemple 4 Étudier la continuité au point de raccord des fonctions suivantes :

- $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$

- $g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 0 \text{ et } x \neq 1, \\ 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

- $h : x \longmapsto \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1.3. Continuité sur un intervalle

Définition 3 | Continuité sur un intervalle
Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si pour tout $x_0 \in \mathrm{I}$, f est continue en x_0, alors on dit que f est continue sur I.

Notation
On note $\mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

CATALOGUE DE FONCTIONS CONTINUES. Les fonctions usuelles, à l'exception de la fonction partie entière pour laquelle tous les entiers relatifs sont des points de discontinuité, sont continues sur leur domaine de définition, c'est-à-dire :

- Les fonctions polynomiales, exponentielle, sinus, cosinus, valeur absolue, racine cubique sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- La fonction logarithme népérien est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction tangente est continue sur les intervalles $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, pour $k \in \mathbb{Z}$.
- La fonction partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k, k+1[$ (elle est constante sur chaque $]k, k+1[$)
- La fonction arctan est continue sur $\mathbb{R}$.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONTINUES. Passons maintenant aux propriétés qui vont nous permettre de montrer que des fonctions sont continues en pratique.

Proposition 2 | Opérations sur les fonctions continues en un point
Soient I un intervalle, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :
- les fonctions $|f|$, $f+g$, λf (où $\lambda \in \mathbb{R}$) et fg sont encore continues en x_0.
- De plus, si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est définie sur un voisinage de x_0 et est continue en x_0.

On déduit immédiatement de la définition d'une fonction continue, des versions locales des deux énoncés précédents leur version globale : « Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I. Alors les fonctions $|f|$, $f+g$, λf (où $\lambda \in \mathbb{R}$) et fg sont encore continues sur I. De plus, si g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I. »

Théorème 1 | Composition de fonctions continues
Soient I et J deux intervalles, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$
- **[Version locale]** Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :
$$\begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ est continue en } x_0 \\ \textbf{(ii)} & g \text{ est continue en } f(x_0) \end{cases} \Longrightarrow g \circ f \text{ est continue en } x_0.$$
- **[Version globale]** Si f est continue sur I et g est continue sur J, alors $g \circ f$ est continue sur I.

Méthode Montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle
En pratique, pour montrer qu'une fonction est continue, on utilise la continuité établie des fonctions de référence combinées par des opérations algébriques ou de composition, puis on vérifie à la main (calcul de limite) les points qui posent problème.

Exemple 5 Étudier la continuité des fonctions suivantes :
- $f : x \longmapsto \begin{cases} 3x^2+1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 3x^2-1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

- $g : x \longmapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Théorème 2 | Composition d'une fonction continue avec une suite

Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $\ell \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ est continue en } \ell \\ \textbf{(ii)} & u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \end{cases} \Longrightarrow f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\ell).$$

Remarque 2

- En d'autres termes, pour une fonction continue, peut permuter symbole limite et fonction : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n \to \infty} u_n\right)$.
- Ce résultat est crucial dans l'étude de suites récurrentes vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$. Il nous avait permis de montrer que toute limite finie ℓ de (u_n) est un point fixe de f donc vérifie $\ell = f(\ell)$.

Preuve Par hypothèse, $\lim\limits_{x \to \ell} f(x) = \ell$. Donc par caractérisation séquentielle de la limite, puisque $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$, on déduit le résultat $f(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(\ell)$.

1.4. Prolongement par continuité

Définition 4 | Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$ telle que f admette une limite finie en x_0.

- On appelle alors *prolongement par continuité de f en x_0* la fonction $\tilde{f}$ définie sur I tout entier par :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathrm{I} \setminus \{x_0\}, \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

- La fonction $\tilde{f}$ est souvent encore notée $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, et elle est continue en x_0. On dit aussi que l'on a effectué un *prolongement par continuité de f en x_0*.

(On peut définir de manière analogue le prolongement par continuité à gauche de f en x_0 et le prolongement par continuité à droite de f en x_0.)

Remarque 3 Lorsque f n'est pas continue en plusieurs points, on étend sans difficulté la définition précédente : il s'agit alors d'analyser l'existence d'une limite en tous les points aux bornes du domaine de définition, en lesquels f n'est pas définie.

Exemple 6 Prolonger par continuité les deux fonctions ci-dessous aux bornes de leur ensemble de définition.

1. $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x}. \end{array} \right.$

2. $g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & \dfrac{\arctan x}{x}. \end{array} \right.$

2. GRANDS THÉORÈMES SUR LES FONCTIONS CONTINUES

2.1. Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intermédiaires permet de démontrer l'existence (mais pas l'unicité !) de solutions d'une équation du type $f(x) = k$, où f est une fonction et k un nombre réel.

EXISTENCE D'UNE SOLUTION À L'ÉQUATION $f(x) = 0$. Traitons le cas des équations du type $f(x) = 0$.

Théorème 3 | Théorème des valeurs intermédiaires
Soient I un intervalle, $(a, b) \in \mathrm{I}^2$ tels que $a \leqslant b$, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application **continue** telle que : $f(a) \times f(b) \leqslant 0$. Alors :

$$\exists c \in [a, b], \quad f(c) = 0.$$

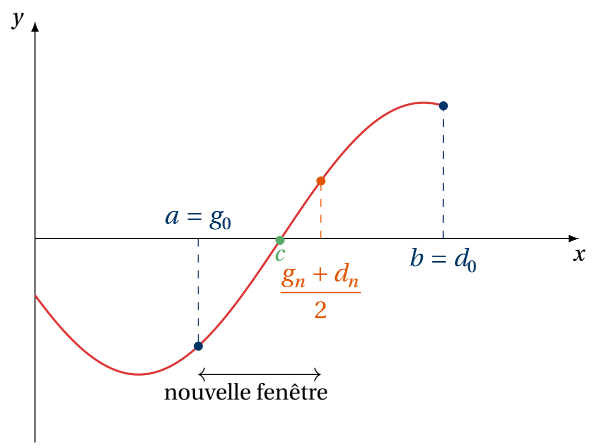
Nous présentons ici une preuve « constructive » du théorème : nous allons construire c comme la limite de deux suites adjacentes.

Preuve *(Approximation de c par dichotomie)* La démonstration de ce théorème repose sur le **principe de dichotomie**. On va découper successivement l'intervalle d'étude en deux sous-intervalles plus petit dont l'un contient le point qui nous intéresse.
Sans perte de généralité on peut supposer que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (si $f(a) = 0, c = a$ convient et si $f(b) = 0, c = b$ convient).

- On va définir deux suites (g_n) et (d_n) telles que les intervalles $[g_n, d_n]$ soient de plus en plus petits, et on montre qu'elles convergent vers une même limite c. Posons $g_0 = a$ et $d_0 = b$, puis par récurrence :

$$\begin{cases} g_{n+1} = g_n,\ d_{n+1} = \frac{g_n+d_n}{2} & \text{si} \quad f\left(\frac{g_n+d_n}{2}\right) \geqslant 0, \\ g_{n+1} = \frac{g_n+d_n}{2},\ d_{n+1} = d_n & \text{si} \quad f\left(\frac{g_n+d_n}{2}\right) < 0. \end{cases}$$

Faisons un dessin par exemple dans le cas d'une fonction croissante.



Alors, on montre par récurrence la propriété $(\mathscr{P}_n)$:
«$g_n, d_n \in [a, b], \quad a = g_0 \leqslant \ldots \leqslant g_n, \quad d_n \leqslant \ldots \leqslant d_0 = b,$
$d_n - g_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad f(g_n) \leqslant 0 \leqslant f(d_n)$.»

On est à présent capables de conclure.

(Algorithme de dichotomie pour les fonctions) Cette dernière preuve nous livre directement un algorithme pour approcher ce type de zéros, qui est très important.

```
def dicho(a, b, f, prec):
    """
    Retourne une valeur approchée d'un zéro de f entre a et b \
    ↪ avec précision
    prec
    """
    g, d = a, b
    while d - g > prec:
        m = (g + d)/2
        if f(g)*f(m) <= 0:
            # changement de signe sur [g,m]
            d = m
        else:
            # pas de changement de signe sur [g,m]
            g = m
    return (g + d)/2
```

On peut aussi adopter une version récursive.

```
def dicho_rec(a, b, f, prec):
    """
    Retourne une valeur approchée d'un zéro de f entre a et b \
    ↪ avec précision prec
    """
    if b - a <= prec:
        return (a + b)/2
    else:
        m = (a + b)/2
        if f(a)*f(m) <= 0:
            # changement de signe sur [a,m]
            return dicho_rec(a, m, prec)
        else:
            # pas de changement de signe sur [a,m]
            return dicho_rec(m, b, prec)
```

Il existe encore d'autres méthodes plus sophistiquées (méthode de NEWTON, de la sécante, *etc.*...).

Remarque 4 (S'il existe plusieurs c) S'il existe plusieurs c tels que $f(c) = \lambda$, la preuve précédent ne précise pas vers lequel les suites convergent. Il s'agira donc dans ce cas là d'initialiser à des bornes a, b suffisamment proches de sorte qu'il n'existe qu'une solution dans l'intervalle $[a, b]$.

Remarque 5 **(Variations autour de la dichotomie)** Pour résoudre

- $f(x) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, on utilise les fonctions `dicho` et `dicho_rec` précédentes à $x \longmapsto f(x) - \alpha$,
- $f(x) = x$, on utilise les fonctions `dicho` et `dicho_rec` précédentes à $x \longmapsto f(x) - x$.

Exemple 7

- De quel réel obtient-on une valeur approchée pour $f(x) = x^2 - 2$, $a = 1$ et $b = 2$?
- De quel réel obtient-on une valeur approchée pour $f(x) = \sin(x)$, $a = 3$ et $b = 4$?

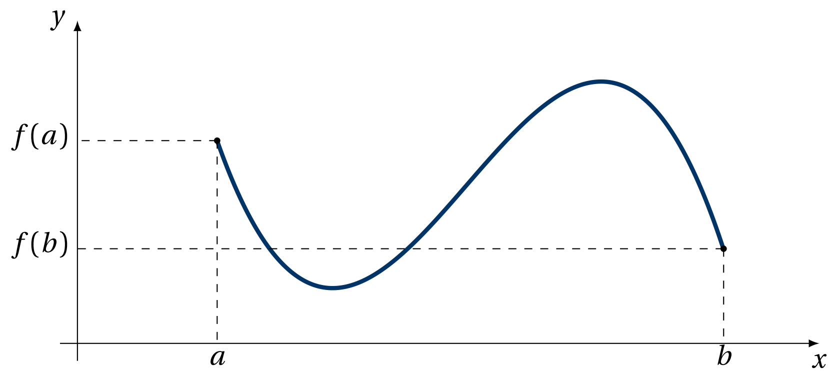
Exemple 8 Prouver que $x \longmapsto \dfrac{1}{x} - 2x + \ln(x)$ s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner une valeur approchée d'une solution à 10^{-3} près.

Exemple 9 Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une application continue. Alors, f admet un *point fixe* : il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

EXISTENCE D'UNE SOLUTION À L'ÉQUATION $f(x) = k$. Le théorème des valeurs intermédiaires est à utiliser lorsque l'on souhaite prouver l'existence d'un réel solution à une équation. Il existe une version plus générale :

Théorème 4 | Théorème des valeurs intermédiaires
Soient I un intervalle, $(a,b) \in \mathrm{I}^2$ tels que $a \leqslant b$, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue**. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Plaçons un point k entre $f(a)$ et $f(b)$ ci-dessous, et illustrons le théorème.



Corollaire 1 | Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires
L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Preuve

- Soient I un intervalle et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On admet que $f(\mathrm{I})$ est un intervalle si et seulement si pour tout $(y, y') \in f(\mathrm{I})^2$ tel que $y \leqslant y'$, on a $[y, y'] \subset f(\mathrm{I})$. Utilisons ce fait pour montrer que $f(\mathrm{I})$ est aussi un intervalle.
- Pour un tel couple (y, y'), il existe $(x, x') \in \mathrm{I}^2$ tel que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$.

- Supposons par exemple que $y' \geqslant y$. Soit $k \in [y, y'] = [f(x), f(x')]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in \mathrm{I}$ tel que $k = f(c)$, donc $k \in f(\mathrm{I})$. Ainsi, $[y, y'] \subset f(\mathrm{I})$. Même chose si $y' < y$.
- On en déduit que $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.

2.2. Théorème des bornes atteintes

Définition 5 | Segment

On appelle segment tout intervalle fermé borné, *i.e.* tout intervalle du type $[a, b]$, ou a et b sont deux réels de sorte que $a < b$.

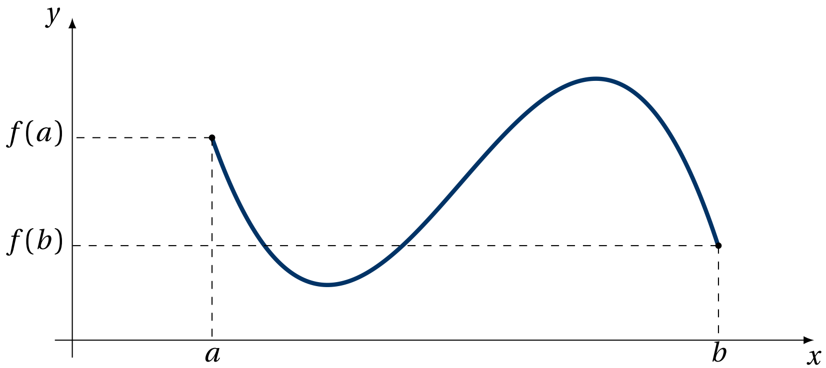
Ainsi, l'intervalle $[2, 5]$ est un segment tandis que l'intervalle $]0, 4]$ n'en est pas un.

Théorème 5 | Théorème des bornes atteintes

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Toute fonction f définie et **continue** sur un **segment** $[a, b]$ y est bornée et atteint ses bornes (les bornes inférieures et supérieures $\inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ et $\sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ sont des valeurs atteintes), *i.e.* :

$$\begin{cases} \exists m \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a, b],\ m \leq f(x) \leq \mathrm{M}, \\ \exists x_0 \in [a, b],\ f(x_0) = m, \quad \exists x_1 \in [a, b],\ f(x_1) = \mathrm{M} \end{cases}$$

Plaçons les points x_0 et x_1 sur la figure ci-dessous.



Nous admettons ce théorème, dont la preuve nécessite un théorème hors-programme sur les suites.

Attention — N'oubliez pas une des hypothèses

Chacune des hypothèses du théorème est essentielle ! Par exemple :

- **[Si le domaine de définition n'est pas un segment]**
- **[Si la fonction n'est pas continue]**

Corollaire 2 | Image d'un segment par une fonction continue

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Autrement dit, si f est une continue sur un segment $[a, b]$, on a :

$$f([a, b]) = [m, \mathrm{M}], \quad \text{où :} \quad m = \min_{[a,b]} f \quad \text{et} \quad \mathrm{M} = \max_{[a,b]} f.$$

Preuve Montrons l'égalité d'ensembles par double-inclusion : $f([a, b]) = [m, \mathrm{M}]$.

$\boxed{\subset}$ Par definition du max et du min : $\forall x \in [a, b], m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$, donc $f([a, b]) \subset [m, \mathrm{M}]$.

$\boxed{\supset}$ D'après le théorème des bornes atteintes, il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que $m = f(x_1), \mathrm{M} = f(x_2)$. Par définition de l'image d'un intervalle, $m \in f([a, b])$ et $\mathrm{M} \in f([a, b])$.

Comme $f([a,b])$ est un intervalle d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on a $[m,\mathrm{M}] \subset f([a,b])$.

2.3. Théorème de la bijection

Lorsque l'on souhaite montrer l'existence **mais aussi l'unicité** d'une solution pour une équation du type $f(x) = k$, on aura recours au théorème de la bijection sur un intervalle bien choisi.

Théorème 6 | Théorème de la bijection

Soit f une fonction numérique **continue** sur $\mathrm{I} \subset \mathscr{D}_f$, et **strictement monotone** sur I. Alors :

- $f(\mathrm{I})$ est un intervalle, et f réalise une bijection de I sur $f(\mathrm{I})$. Plus précisément, l'intervalle $f(\mathrm{I})$ est donné par le tableau suivant :

$f(\mathrm{I})$ \ I	$[a,b]$	$]a,b]$	$[a,b[$	$]a,b[$
str. ↗	$[f(a), f(b)]$	$\left]\lim_a f, f(b)\right]$	$\left[f(a), \lim_b f\right[$	$\left]\lim_a f, \lim_b f\right[$
str. ↘	$[f(b), f(a)]$	$\left[f(b), \lim_a f\right[$	$\left]\lim_b f, f(a)\right]$	$\left]\lim_b f, \lim_a f\right[$

- La bijection réciproque $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \longrightarrow \mathrm{I}$ est continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

Remarque 6 Ce théorème sert à montrer l'existence et l'unicité de solutions à certaines équations.

Preuve

- L'ensemble $f(\mathrm{I})$ est bien un intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires et f est surjective de I dans $f(\mathrm{I})$ par définition de $f(\mathrm{I})$. Il reste donc à vérifier que f est bien injective sur I.
- Si f est strictement croissante sur I, alors : $x < y \iff f(x) < f(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathrm{I}^2$. Ainsi, si $f(x) = f(y)$ avec $x, y \in \mathrm{I}$, montrons que $x = y$.
  - ⋄ Si $x > y$, alors $f(x) > f(y)$ — contradiction.
  - ⋄ Si $x < y$, alors $f(x) < f(y)$ — contradiction.

  Donc nécessairement $x = y$. La fonction f est donc bien injective sur I et f^{-1} est bien strictement croissante sur $f(\mathrm{I})$.
- La preuve dans le cas où f est strictement décroissante sur I est identique.

Méthode Utilisation du théorème de la bijection ou du théorème des valeurs intermédiaires

On souhaite justifier l'existence (et l'unicité éventuelle) d'une solution $x \in \mathbb{R}$ à l'équation $f(x) = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Si l'unicité n'est pas souhaitée : on applique le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Si l'unicité est souhaitée : on applique le théorème de la bijection sur un intervalle I tel que $\alpha \in f(\mathrm{I})$.

Notez également que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à $g(x) = \alpha$ avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$, et $\alpha = 0$.

Exemple 10 Prouver que $f : x \longmapsto \ln\left(x^2 - x - 2\right) + x^2$ s'annule exactement deux fois sur son domaine de définition.

3. COMPLÉMENTS DE DÉRIVATION

On reprend quelques généralités sur les fonctions dérivables, avant d'y ajouter quelques grands théorèmes.

3.1. Rappels : nombre dérivé, fonction dérivable

Définition 6 | Dérivabilité

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$.

- On dit que f est *dérivable* en x_0 si la fonction

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{I} \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \underbrace{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\substack{\text{Taux d'accroissement de } f \\ \text{entre } x \text{ et } x_0}} \end{array}\right.$$

  admet une limite finie en x_0. La limite est alors appelée le *nombre dérivé de f en x_0*. *(Puisque x_0 est un bord de $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$, la limite éventuelle a bien un sens)*
- On dit que f est *dérivable à droite en x_0* (*resp. à gauche*) si on a seulement existence d'une limite à droite ou à gauche.

Notation

On note en général (sous réserve d'existence) :

- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ la dérivée de f en x_0,
- $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ la dérivée de f à gauche en x_0,
- $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ la dérivée de f à droite en x_0.

On obtient directement des résultats sur les limites, la propriété suivante.

Proposition 3 | Dérivabilité, à gauche et à droite

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \iff \begin{cases} \textbf{(i)} & f \text{ dérivable à droite et à gauche en } x_0 \\ \textbf{(ii)} & f'_g(x_0) = f'_d(x_0). \end{cases}$$

Remarque 7

- Une fonction est donc dérivable en x_0 si son taux d'accroissement tend vers une limite finie.
- Le taux d'accroissement s'interprète comme la pente de la corde du graphe de f entre les points d'abscisses x_0 et x. Lorsque f est dérivable en x_0, le nombre $f'(x_0)$ s'interprète alors comme la « pente limite » de ces cordes.

Remarque 8 (Version « $x_0 + h$ ») La limite du taux d'accroissement peut aussi, par composition des limites (poser « $h = x - x_0 \xrightarrow[x \longrightarrow x_0]{} 0$ »), être écrite sous cette forme :

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Définition 7 | Tangente

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$.

- Si f est dérivable en $x_0 \in \mathrm{I}$, on appelle *tangente à f d'abscisse a* la droite d'équation :
$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$
- Si f est dérivable à gauche (*resp.* droite) en $x_0 \in \mathrm{I}$, on appelle *demi-tangente à gauche (resp. droite) à f d'abscisse x_0* la droite d'équation :
$$y = f'_g(x_0)(x-x_0) + f(x_0) \quad \left(\textit{resp.} \quad y = f'_d(x_0)(x-x_0) + f(x_0)\right).$$

On dit que f *admet une tangente horizontale en x_0* lorsque $f'(x_0) = 0$.

Exemple 11

1. La valeur absolue n'est pas dérivable en zéro, mais elle l'est à droite et à gauche.

2. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en zéro.

Exemple 12 Soit $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array} \right.$ Étudier la dérivabilité de f en zéro.

Exemple 13 On considère la fonction f définie par $f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)(x - \lfloor x \rfloor - 1)$. Étudier la dérivabilité en chaque entier $k \in \mathbb{Z}$, et celles à droite/gauche.

Exemple 14 **(Cas d'un prolongement continu)** Montrer que l'on peut prolonger par continuité en 0 la fonction $f : x \longmapsto x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

Rappelons également le lien entre continuité et dérivabilité.

Théorème 7 | Dérivabilité & Continuité

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$. Alors :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \implies f \text{ continue en } x_0.$$

Preuve Supposons f dérivable en x_0. Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{si } x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array} \right.$

La fonction φ est alors continue en x_0 (en tant que prolongement par continuité), de plus on a

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$$

La fonction $x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$ est continue en x_0 et donc f est continue en x_0.

Attention

La réciproque est, en général, fausse. La valeur absolue est continue en zéro, alors qu'elle n'y est pas dérivable comme nous l'avons déjà constaté.

Enfin, en faisant varier x_0 on créer ainsi une nouvelle fonction notée f'.

Définition 8 | Fonction dérivée, Fonction dérivable

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *dérivable sur* I si f est dérivable en tout point $x \in \mathrm{I}$. La fonction $x \longmapsto f'(x)$ s'appelle la *fonction dérivée de f*.

Notation

On note $\mathscr{D}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs réelles.

Avant de poursuivre, refaisons quelques calculs de dérivées. Il convient de refaire ceux présents dans le chapitre de fonctions du premier semestre si vous pensez avoir oublié certaines formules.

Exemple 15 **(Calculs de dérivées – Synthèse)** Dériver les fonctions suivantes, en commençant par justifier qu'elles sont bien dérivables sur un domaine à préciser.

1. $f : x \longmapsto (x+1)^2(2x-1)^3$

2. $g : x \longmapsto \dfrac{\cos\left(x^2\right)}{x}$

3. $u : x \longmapsto \sqrt{\ln(x)}$

4. $v : x \longmapsto \sin^3(x)\tan(3x)$

3.2. Dérivées successives, classe d'une fonction

DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR. Lorsque f' est encore dérivable, on appelle la dérivée de f' la dérivée *seconde* de f, et ainsi de suite.

Définition 9 | Dérivabilité n-ième
Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit, sous réserve d'existence, les *dérivées successives* de f en posant $f^{(0)} = f$ et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'.$$

Exemple 16 Déterminer les dérivées successives de ln.

Exemple 17 Montrer que cos est n fois dérivable, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Définition 10 | Classe $\mathscr{C}^1, \mathscr{C}^n$

- Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *de classe* $\mathscr{C}^1$ sur I si :
  - ◇ f est dérivable sur I,
  - ◇ et si f' est **continue** sur I.
- Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *de classe* $\mathscr{C}^n$ sur I si :
  - ◇ f est n fois dérivable sur I,
  - ◇ et si $f^{(n)}$ est **continue** sur I.
- Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *de classe* $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notation $\mathscr{D}_k$ **et** $\mathscr{C}^k$

- On note $\mathscr{D}^k(\mathrm{I})$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur I, donc telles que $f^{(k)}$ existe.
- $\mathscr{C}^k(\mathrm{I})$ est donc l'ensemble des fonctions de $\mathscr{D}^k(\mathrm{I})$ telles que $f^{(k)} \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I})$.

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on omet parfois d'indiquer l'intervalle I.

Remarque 9 (Inclusions) Ainsi, en notant $\mathscr{C}^n(\mathrm{I})$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $\mathscr{D}^n(\mathrm{I})$ l'ensemble des applications n fois dérivables sur I,

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^{n+1}(\mathrm{I}) \subset \mathscr{D}^{n+1}(\mathrm{I}) \subset \mathscr{C}^n(\mathrm{I}) \subset \mathscr{D}^n(\mathrm{I}) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^1(\mathrm{I}) \subset \mathscr{D}^1(\mathrm{I}) \subset \mathscr{C}^0(\mathrm{I})$$

Attention au vocabulaire

On dit bien « f dérivable à dérivée continue » pour signifier que f est $\mathscr{C}^1$ et pas « f est continue dérivable » qui signifie simplement que f est dérivable ! (car dérivable implique continue).

Proposition 4 | Caractère $\mathscr{C}^k$ des fonctions usuelles

- Les fonctions $x \longmapsto \cos x, x \longmapsto \sin x, x \longmapsto \tan x, x \longmapsto \arctan x, x \longmapsto \mathrm{e}^x, x \longmapsto \ln(x)$ et $x \longmapsto x^k, k \in \mathbb{Z}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.
- Les fonctions $x \longmapsto |x|$ et $x \longmapsto x^a, a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition privé de 0.
- Soit $k \in \mathbb{N}$, les sommes, produits, combinaisons linéaires, compositions et quotients (bien définis) de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$) sont de classe $\mathscr{C}^k$ (respectivement $\mathscr{C}^\infty$).

Remarque 10 Ainsi, les théorèmes portant sur la dérivabilité d'une somme, d'un produit, d'une composée, *etc.*) de fonctions sont transposables au cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ (la somme, le produit, le quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, la composée d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I à valeurs dans J et d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur J est une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, *etc.*).
En revanche, n'essayer pas de deviner une formule pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une composée, c'est la formule de FAÀ DI BRUNO connue pour être une formule inutiliasble en pratique :

$$(g \circ f)^{(n)} = \sum_{(m_1,\ldots,m_n)\in\mathbb{N}^n, 1m_1+2m_2+\ldots+nm_n=n} \frac{n!}{m_1!\ldots m_n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k)}}{k!}\right)^{m_k} \times g^{(m_1+\ldots+m_n)} \circ f$$

Exemple 18 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2\ln(x)$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}_+$, on notera encore f

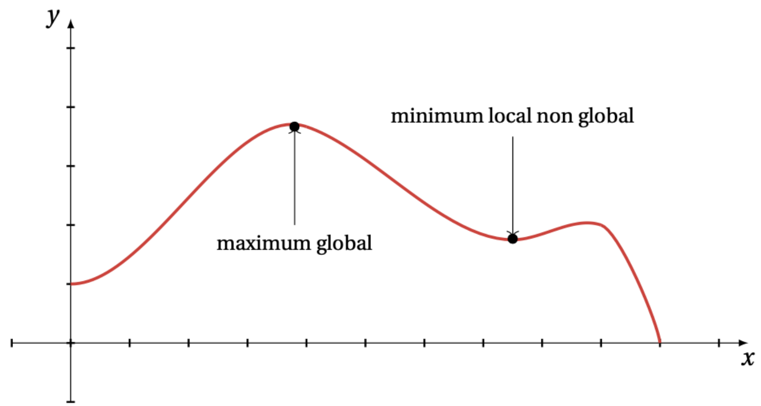
la fonction ainsi prolongée.

2. Montrer que f est alors dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que f est de classe $\mathscr{C}^1$.

dans $\mathscr{D}_f$, c'est-à-dire sur un domaine de la forme $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\cap\mathscr{D}_f$, pour un certain $\alpha>0$. Ainsi :

- f admet un *maximum local* en x_0 si :
$$\exists\alpha>0,\quad \forall x\in]x_0,-\alpha, x_0+\alpha[\cap\mathscr{D}_f,\quad f(x)\leq f(x_0).$$
- f admet un *minimum local* en x_0 si :
$$\exists\alpha>0,\quad \forall x\in]x_0,-\alpha, x_0+\alpha[\cap\mathscr{D}_f,\quad f(x)\geq f(x_0).$$

- On dit que f admet en x_0 un *extremum* (*resp. extremum local*) si f admet en x_0 un minimum ou un maximum (*resp.* un minimum local ou un maximum local).



4. GRANDS THÉORÈMES SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

4.1. Points critiques et extremums locaux

Définition 11 | *Extrema* global / local

Soit $\mathscr{D}_f$ un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction de $\mathscr{D}_f$ dans $\mathbb{R}$.

- **[Global]** On dit que f admet un *maximum global* en x_0 si $x_0\in\mathscr{D}_f$, et :
$$\forall x\in\mathscr{D}_f,\quad f(x)\leqslant f(x_0).$$
On dit alors que $f(x_0)$ est le maximum de f sur $\mathscr{D}_f$.
- **[Global]** On dit que f admet un *minimum global* en x_0 si $x_0\in\mathscr{D}_f$, et :
$$\forall x\in\mathscr{D}_f,\quad f(x)\geqslant f(x_0).$$
On dit alors que $f(x_0)$ est le minimum de f sur $\mathscr{D}_f$.
- **[Local]** On dit que f admet en $x_0\in\mathscr{D}_f$ un *minimum local*/*maximum local* si l'une des égalités précédentes a lieu uniquement sur un voisinage de x_0

Définition 12 | Point critique

On appelle *point critique* d'une fonction dérivable $f:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ tout réel $x_0\in\mathrm{I}$ tel que $f'(x_0)=0$.

Théorème 8 | Condition nécessaire pour qu'un point intérieur soit un extremum local

Soient $f:\mathrm{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ une application et $x_0\in\mathrm{I}$. On suppose que :

1. x_0 est à l'intérieur de I, *i.e.* il existe $\alpha>0$ vérifiant : $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[\subset\mathrm{I}$, autrement dit, x_0 n'est pas une borne de I,
2. f admet en x_0 un extremum local,
3. f est dérivable en x_0.

Alors :
$$x_0 \text{ est un point critique de } f,\quad \text{c'est-à-dire : }\quad f'(x_0)=0.$$

Preuve

Remarque 11 (Autour des hypothèses du théorème précédent) Chacune des hypothèses du théorème précédent est indispensable :

- **[Si x_0 est une borne de I]**

- **[Si f n'est pas dérivable en x_0]**

Remarque 12 (Réciproque du théorème) La réciproque du théorème est fausse. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$, mais f n'admet pas d'extremum local en 0.
Nous reverrons un peu plus tard que l'on a un extremum (local) en un point critique x_0 qui n'est pas une borne de l'intervalle de définition si, de plus, la dérivée s'annule **en changeant de signe** en x_0.

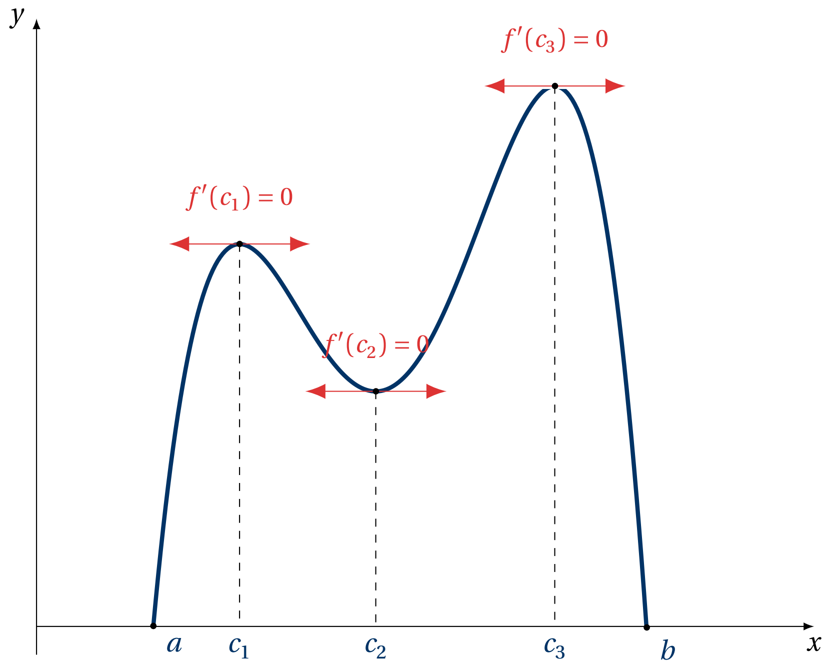
4.2. Théorème de Rolle

Théorème 9 | Théorème de Rolle
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $a < b$). On suppose que :
- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(x_0) = f(b)$.

Alors : $\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = 0.$

L'interprétation du théorème est la suivante : à un moment, la courbe possède une tangente horizontale.

Attention
Il n'y a pas unicité d'un tel c, on le constate sur la figure ci-après. On peut aussi considérer la fonction sin sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.



Preuve Si f est constante sur $[a,b]$, alors le résultat est évident. Sinon, l'application f étant continue sur le segment $[a,b]$, elle admet un minimum et un maximum distincts sur cet intervalle. Au moins un de ces *extrema* est différent de $f(a)=f(b)$ (sinon f serait constante) et correspond donc à un point intérieur à $[a,b]$, c'est-à-dire à un point de $]a,b[$. Le Théorème 8 conclut.

Le théorème de Rolle est souvent appliqué pour trouver l'existence d'un zéro de la dérivée entre deux zéros de la fonction (cas particulier où $f(a)=f(b)=0$).

Remarque 13 **(Autour des hypothèses du théorème.)** Encore une fois, chaque hypothèse du théorème a son importance.

- **[Si $f(a)\neq f(b)$]**

  🖋

- **[Si f n'est pas dérivable sur $]a,b[$]**

  🖋

- **[Si f n'est pas continue en a]**

  🖋

Remarque 14 La fonction f n'a pas besoin d'être dérivable aux bornes de l'intervalle (considérer par exemple $x\longmapsto\sqrt{1-x^2}$ sur $[-1,1]$), on peut montrer que $f(-1)=f(1)$ avec f dérivable seulement sur $]-1,1[$ vérifiant $f'(0)=0$).

Exemple 19

1. Montrer qu'entre deux racines d'un polynôme P, il existe une racine de P′.

🖋

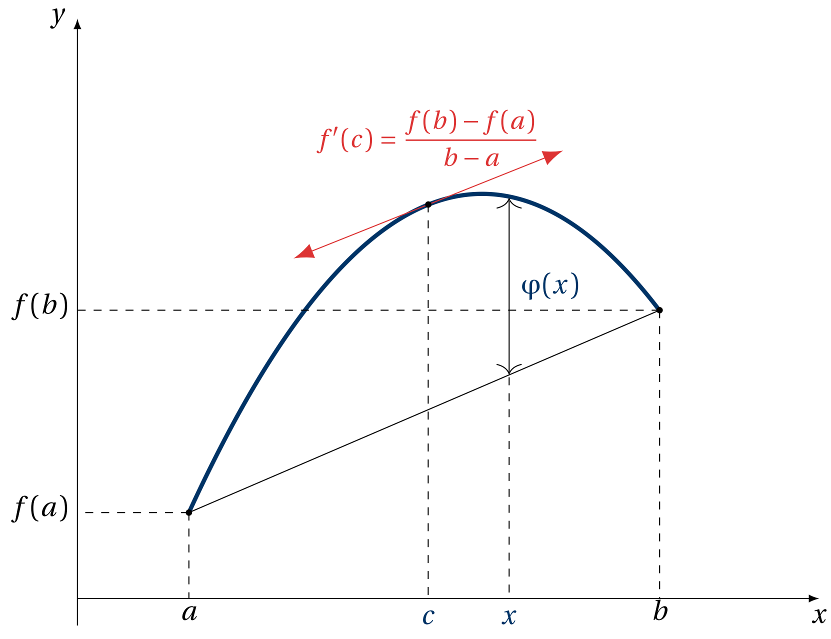
2. Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, on suppose que f s'annule trois fois. Montrer que f'' s'annule au moins une fois.

4.3. Egalité des accroissements finis

Théorème 10 | Égalité des accroissements finis
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $a < b$). On suppose que :
- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors : $\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

L'interprétation du théorème est la suivante : à un moment, le coefficient directeur de la tangente vaut celui de la sécante entre les points $(a, f(x_0))$ et $(b, f(b))$.



Preuve *(Idée clef : appliquer le théorème de Rolle pour une fonction bien choisie)* Introduisons la fonction φ définie sur $[a, b]$ par :

$$\forall x \in [a, b], \quad \varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times (x - a) - f(a).$$

Remarque 15 **(Inégalités des accroissements finis)**

1. Dans les faits, il n'est pas très pratique de manipuler le nombre $f'(c)$ pour la simple raison que l'on ne connaît pas la valeur de c. On préférera très souvent encadrer la dérivée (ou majorer sa valeur absolue) pour obtenir un encadrement de $f(b)-f(a)$. De ce constat se déduit l'*inégalité des accroissements finis* mais qui n'est pas au programme.
2. L'égalité des accroissements finis permet donc de majorer l'écart entre deux images $f(x_1)$ et $f(x_2)$ en fonction de l'écart entre x_1 et x_2 et des valeurs de f'.
3. Ce théorème intervient souvent dans les exercices dédiés à l'étude d'une suite récurrente de la forme $u_{n+1}=f(u_n)$. Ces exercices sont très classiques et très présents aux concours.

Exemple 20 Montrons à l'aide de l'égalité des accroissements finis (appliquée à $t \longmapsto \ln(1+t)$ sur $[0,x]$ pour tout $x>0$) que :

$$\forall x>0, \qquad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

Exemple 21 **(Étude d'une suite récurrente)** Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{1}{3}\left(4-x^2\right)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \left[0,\frac{4}{3}\right]$, $\quad \left|f'(x)\right| \leqslant \frac{8}{9}$.

2. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 \in \left[0, \frac{4}{3}\right], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(4 - u_n^2\right).$$

2.1) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

2.2) À l'aide de l'égalité des accroissements finis, montrer que (u_n) converge vers 1.

4.4. Lien avec la monotonie

Démontrons enfin le fait suivant, déjà en classe de Première et largement utilisé dans les études de fonctions, mais admis à l'époque. C'est une conséquence de l'égalité des accroissements finis.

Théorème 11 | Monotonie et signe de la dérivée

Soit I un intervalle non-vide de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$. Alors :

- **[Monotonie]**

$$f \text{ est croissante} \iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) \geqslant 0,$$
$$f \text{ est décroissante} \iff \forall x \in \mathrm{I}, \quad f'(x) \leqslant 0.$$

- **[Stricte monotonie]**
  - Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) < 0$ et $f'(x) = 0$ éventuellement en des points (ponctuels), alors f est strictement décroissante.
  - Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) > 0$ et $f'(x) = 0$ éventuellement en des points (ponctuels), alors f est strictement croissante.

Preuve On se contente de prouver le premier point dans le cas croissant, les autres se prouvant de la même façon.

Nous sommes désormais capables de détecter les points critiques (en un point intérieur du domaine de définition d'une fonction) qui fournissent des extremums locaux.

Théorème 12 | Caractérisation des extremums locaux en un point intérieur

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (où $a < b$). Si f est dérivable sur $]a, b[$ et si il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que f' **<u>s'annule en changeant de signe en x_0</u>**, alors f possède un extremum local en x_0.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(x_0)$	↗	

Minimum local

x	a		x_0		b
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$f(x_0)$	↘	

Maximum local

5. EXERCICES

Note : vous pouvez utiliser GeoGebra (logiciel libre) pour vérifier vos résultats. Allez dans menu "affichage", sélectionnez "calcul formel" puis utilisez une des commandes "Résoudre", "Dérivée" ou "Limite". Tracer par exemple la fonction étudiée vous aidera à vérifier vos résultats. De plus, l'utilisation de ce logiciel est autorisée au concours Agro-Véto.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Concernant la continuité :
   - savoir montrer qu'une fonction est continue en un point . . . . ☐
   - savoir prolonger de manière continue une fonction en un point . . . . ☐
   - savoir utiliser la continuité pour déterminer la limite d'une suite récurrente . . . ☐
2. Concernant les théorèmes de continuité :
   - savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour déterminer l'existence d'une solution à une équation du type $f(x) = a$ . . . . ☐
   - savoir utiliser le théorème des bornes atteintes pour prouver l'existence d'un maximum ou d'un minimum . . . . ☐
   - savoir utiliser le théorème de la bijection pour montrer qu'une fonction est bijective, et étudier le sens de variations d'une fonction réciproque . . . . ☐
3. Connaître la notion de dérivabilité :
   - savoir montrer qu'une fonction est dérivable en un point en utilisant le taux d'accroissement . . . . ☐
   - savoir utiliser la dérivabilité à droite et à gauche pour démontrer une dérivabilité ☐
   - savoir déterminer l'équation d'une tangente à une courbe en un point . . . . ☐
4. Savoir utiliser les formules de dérivation :
   - connaître les dérivées des fonctions usuelles . . . . ☐
   - savoir déterminer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, ou d'une composée . . . . ☐
   - savoir déterminer la dérivée en un point d'une fonction réciproque . . . . ☐
5. Concernant les théorèmes de dérivation :
   - savoir utiliser le théorème de Rolle pour démontrer que la dérivée d'une fonction s'annule . . . . ☐
   - savoir utiliser l'inégalité des accroissements finis . . . . ☐
   - connaître le lien entre signe de la dérivée et monotonie d'une fonction . . . . ☐
6. Savoir étudier complètement une fonction (tableau de variations, comportement asymptotique) . . . . ☐

5.1. Continuité

Exercice 1 | Solution Étudier la continuité des fonctions suivantes après avoir déterminé leur domaine de définition.

$$f : x \longmapsto (x^2-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right), \quad g : x \longmapsto \cos(\ln|x|)\ln(1+x).$$

Exercice 2 | Solution Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{e^{x^2}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Exercice 3 | Solution On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| < 1, \\ ax^2+bx+c & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Déterminer les réels a, b et c pour lesquels h est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 | Solution Étudier la définition et la continuité éventuelle de :

$$f : x \longmapsto (-1)^{\lfloor x \rfloor}\left(x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}\right).$$

Exercice 5 | Solution Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \lfloor x \rfloor \sin(\pi x) \qquad g(x) = \lfloor x \rfloor \sin(x).$$

Étudier leur continuité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 | Solution Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}}$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
2. Étudier l'existence d'un éventuel prolongement par continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. On souhaite dans cette question préciser le domaine de définition.
   - **3.1)** Montrer que $\mathscr{D}_f =]\alpha, 0[\cup]0, +\infty[$ avec $-1 < \alpha < 0$ un réel.
   - **3.2)** À l'aide de l'algorithme de dichotomie, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 7 | Solution Soient $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(0) = g(1)$ et $f(1) = g(0)$. Démontrer que l'équation $f(x) = g(x)$ possède au moins une solution dans $[0,1]$.

Exercice 8 | Solution Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer qu'il existe x_1 et x_2 dans $[0;1]$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 - x_2 = \frac{1}{2}$.

Exercice 9 | Solution Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = g\left(\frac{x}{2}\right).$$

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x) = g\left(\frac{x}{2^n}\right).$
2. En déduire que g est constante sur $\mathbb{R}$.

5.2. Dérivation & Étude de fonction

Exercice 10 | **Fonction symétrique dérivable** Solution Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, et soit f une fonction définie au voisinage de x_0.

1. Supposons f dérivable en x_0. Calculer :
$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad \text{et } \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}.$$
2. Supposons que $\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ existe et est finie. La fonction f est-elle forcément dérivable en x_0 ?

Exercice 11 | Solution Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^{\frac{3}{2}}\ln(x) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Donner le domaine de définition et les limites aux bornes.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de g.

Exercice 12 | Solution Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$.

Exercice 13 | Solution Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{1-e^{-2x}}$.

1. Donner le domaine de définition de f. Étudier la continuité de f. La fonction est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. On note encore f la fonction ainsi prolongée. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. *On pourra utiliser librement l'équivalent suivant, qui sera démontrable dans un prochain chapitre :* $2 - x - 2x^2 + e^{-2x}(x-2) \underset{x \to 0}{\sim} 2x$

Exercice 14 | **Étude complète de fonction** Solution Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g(x) = e^x - xe^x + 1.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de g et tracer son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^+$. On note α cette solution.
4. Écrire un programme `ValeurApprocheeAlpha` qui calcule une valeur approchée de α à $\varepsilon = 10^{-3}$ près.
5. Soit A la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\forall x \in [0,+\infty[, \quad A(x) = \dfrac{4x}{e^x+1}$.
   - **5.1)** Etudier la dérivabilité de A, et écrire A′ en fonction de g.
   - **5.2)** En déduire les variations de A sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 15 | Solution On définit une fonction f par :

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x^2-3x+2) & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ x-1-\dfrac{1}{\ln(x-2)} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f.
2. La fonction f est-elle continue ? Dérivable ?
3. Étudier les variations de f. Tracer la courbe.
4. Montrer que f est une bijection de $\left[\dfrac{3}{2},2\right]$ sur un intervalle à déterminer.
5. Étudier la fonction réciproque : domaine de définition, continuité, variations, dérivabilité, courbe.
6. Déterminer explicitement l'expression de la réciproque.

Exercice 16 | Solution En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer :

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right).$$

Exercice 17 | Itérations de Rolle Solution Montrer que si f est non constante, dérivable n fois sur $[a,b]$ et admet $n+1$ zéros sur $]a,b[$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 18 | Solution Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant dont toutes les racines sont réelles et simples. Montrer que toutes les racines de P′ sont réelles et simples.

Exercice 19 | Solution Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Montrer par récurrence l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un polynôme P_n tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Déterminer le degré de P_n ainsi que le coefficient dominant.

5.3. Applications aux suites

Exercice 20 | Suite explicite Solution Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$. Déterminer la limite de la suite (u_n) :

1. à l'aide d'un équivalent,
2. à l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction racine carrée. Quelle information supplémentaire obtient-on ainsi ?

Exercice 21 | Suite implicite Solution Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^3 + 3x - n.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note u_n cette solution.
2. Montrer que $0 \leq u_n \leq n^{\frac{1}{3}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
3. Montrer que la suite est croissante.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a :
$$\left(\frac{u_n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^3 = 1 - 3\frac{u_n}{n}.$$
En déduire que : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n^{\frac{1}{3}}$, puis la limite de la suite (u_n).

Exercice 22 | Suite récurrente Solution On note f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.
2. On définit alors la suite (u_n) par :
$$u_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$
Déterminer les limites éventuelles de la suite (u_n).

Exercice 23 | Suite récurrente Solution On définit la suite (v_n) par récurrence par :

$$v_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \sqrt{12 + v_n}.$$

1. Montrer que la suite est bien définie, minorée par 0 et strictement majorée par 4.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad |v_{n+1} - 4| < \dfrac{1}{4}|v_n - 4|$
3. En déduire que la suite (v_n) converge et donner sa limite.

Exercice 24 | Fonctions k-contractantes Solution On suppose que f est une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ et qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |f(x)-f(y)| \leq k\,|x-y|\,.$$

Une telle fonction s'appelle une fonction k-*contractante*.

1. Montrer que f est continue et admet un unique point fixe dans $[0,1]$ que l'on notera c.

2. On considère alors une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $c_0 \in [0,1]$ et par la relation de récurrence : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+1} = f(c_n)$.

2.1) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

2.2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad |c_n - c| \leq k^n\,|c_0 - c|$.

2.3) En déduire la limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.