# Chapitre # (AN) 8 Développements limités



*Le calcul infinitésimal, [...], est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que celui des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots : MAJORER, MINORER, APPROCHER. »*

— **Jean Dieudonné (1906–1992)**


**Résumé & Plan**

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la notion de développement limité, qui permet notamment d'obtenir des approximations de fonctions à l'aide de fonctions polynomiales.


- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

Commençons par un premier exemple, accessible avec la seule formule de somme de termes géométriques.

## 1. EXEMPLE D'INTRODUCTION

**Exemple 1** **(Introductif : développement limité de $x \longmapsto 1/1-x$)** Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On sait que : $1 + x + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

Donc : $\boxed{\underbrace{\dfrac{1}{1-x}}_{f(x)} = \underbrace{1 + x + \ldots + x^n}_{\text{Polynôme } P_n(x)} + \underbrace{\dfrac{x^{n+1}}{1-x}}_{\text{Ecart entre } f(x) \text{ et } P_n(x)}}$

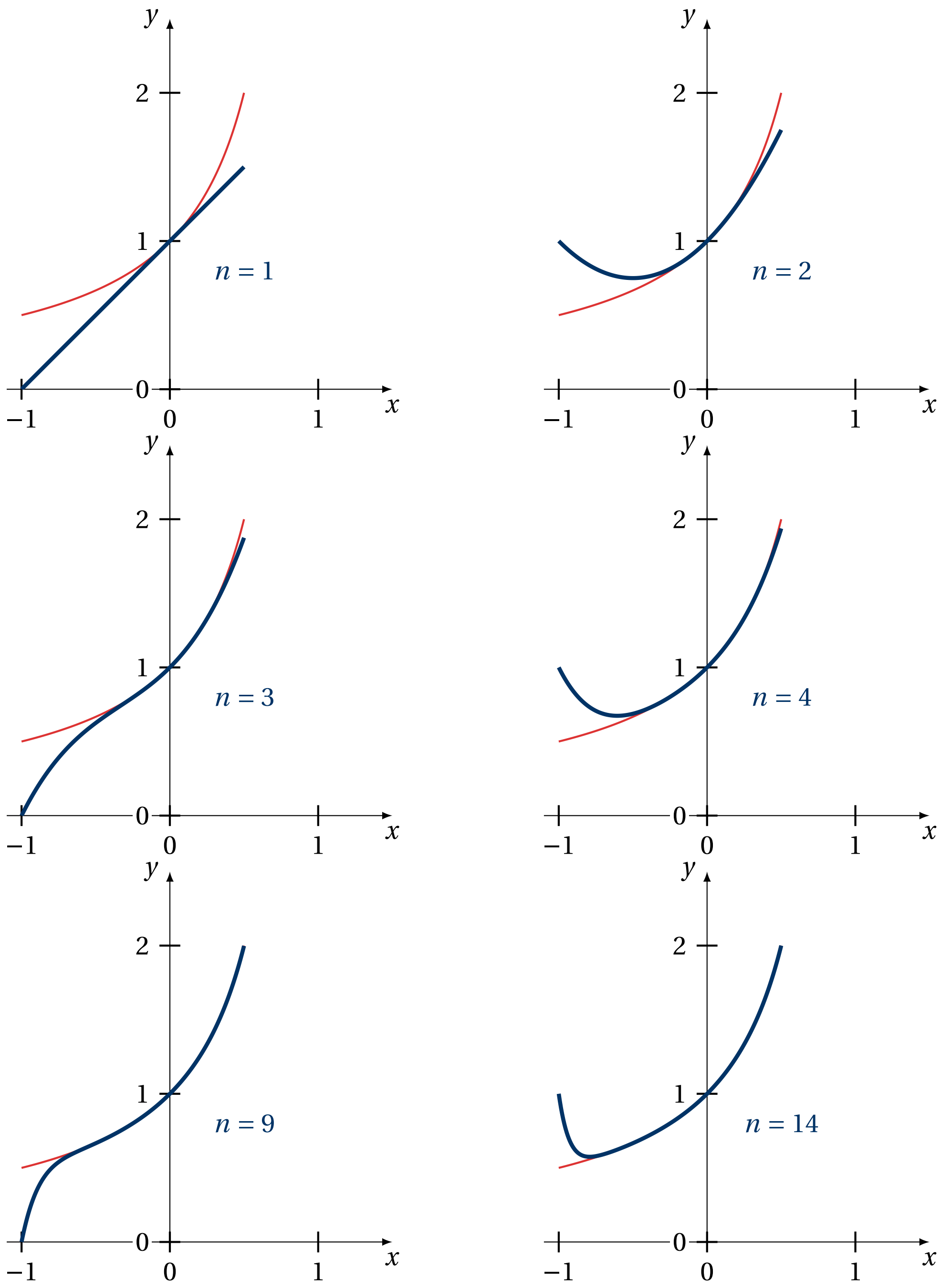
On obtient :

$$\forall x \in ]-\infty, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) = \frac{x}{1-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

Par exemple, pour tout $x \in ]-\infty, 1[$,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} = \underbrace{1 + x}_{P_1(x)} + x\varepsilon(x), & \text{où} \quad \varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \\ \dfrac{1}{1-x} = \underbrace{1 + x + x^2}_{P_2(x)} + x^2\varepsilon(x), & \text{où} \quad \varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{cases}$$

Les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $x \mapsto 1 + x + \cdots + x^n$ ont tendance à se « rapprocher » plus $n$ est grand. Cela indique que $1 + x + \ldots + x^n$ est une « bonne » approximation polynomiale de $\dfrac{1}{1-x}$ $\boxed{\text{au voisinage de } 0}$. On dit que l'on a obtenu le **développement limité** à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ de $\dfrac{1}{1-x}$ en 0.




Approximation de $x \longmapsto {}^{1}/_{1-x}$ par un développement limité pour différentes valeurs de $n$

**Cadre**

**Dans tout le chapitre, et sauf mention contraire :**

- **$\mathrm{I}$ désigne un intervalle non vide et non réduit à un point.**
- **Pour $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\mathcal{V}_{x_0}$ désignera « un voisinage de $x_0$ » (donc un intervalle de la forme $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ si $x_0 \in \mathbb{R}$, de la forme $]\mathrm{A}, \infty[$ si $x_0 = +\infty$, de la forme $]-\infty, \mathrm{A}[$ si $x_0 = -\infty$.**

## 2. NOTION DE NÉGLIGEABILITÉ

### 2.1. Définition

**Définition 1 | Notation $f(x) \underset{x \to x_0}{=} \mathrm{o}(g(x))$**

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un voisinage $\mathrm{I}$ de $x_0$. On dit que $f$ est **négligeable** devant $g$ au voisinage de $x_0$, ce que l'on note

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} \mathrm{o}(g(x))$$

s'il existe une fonction $\varepsilon$ définie sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $x_0$ tel que :

$$\forall x \in \mathcal{V} \cap \mathrm{I}, \quad f(x) = \varepsilon(x) g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Si de plus $g$ ne s'annule pas au voisinage de $x_0$, ce qui sera généralement le cas, alors :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{=} \mathrm{o}(g(x)) \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

**Remarque 1**

- Ce qui va nous intéresser dans ce chapitre, c'est surtout la négligeabilité par rapport aux fonctions du type $x \mapsto x^n$. Mais la notion de négligeabilité est valable pour n'importe quelles fonctions.
- Contrairement aux fonctions équivalentes, l'ordre est important : $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \iff g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)$, mais ce n'est pas vrai pour la négligeabilité !

**Exemple 2 (Utilisation de la notation o)**

1. Soient $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$. Laquelle de ces fonctions est négligeable par rapport à l'autre en $+\infty$ ? Et en $0$ ?

2. Montrer que : $x = \underset{x\to+\infty}{o}(e^x)$ et $\dfrac{1}{x} = \underset{x\to 0}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

3. Montrer que : $(\cos(x)-1)\sin(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

## 2.2. Propriétés du petit o

**Proposition 1 | Etre un $\underset{x\to x_0}{o}(1)$, c'est être de limite nulle en $x_0$**

On a : $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(1) \iff \lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = 0$

**Preuve**

**Remarque 2** Pour ne pas se tromper dans la compréhension des petit o, on pourra écrire au choix :

$$\underset{x\to 0}{o}(g(x)) = g(x)\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\longrightarrow x_0]{} 0 \quad \textbf{(Choix 1)}$$
$$= g(x)\underset{x\to x_0}{o}(1) \quad \textbf{(Choix 2)}.$$

**Proposition 2 | Les petits o absorbent les constantes multiplicatives**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Si $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$, alors :

$$f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(\lambda g(x)) \quad \text{et} \quad \lambda f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$$

**Preuve**

**Proposition 3 | La somme de deux petits o est un petit o**

Si : $\begin{cases} f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(h(x)) \\ g(x) = \underset{x\to x_0}{o}(h(x)) \end{cases}$, alors : $f(x)+g(x) = \underset{x\to x_0}{o}(h(x))$.

**Preuve**

**Proposition 4 | Un petit o d'un petit o est un petit o**

La relation « être négligeable » est transitive.

Si : $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$ et $g(x) = \underset{x\to x_0}{o}(h(x))$, alors : $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(h(x))$.

**Preuve**

**Proposition 5 | Bonne compatibilité des petit o avec les produits**

Si : $\begin{cases} f(x) = \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}(h(x)) \\ g(x) = \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}(k(x)) \end{cases}$ , alors : $f(x)g(x) = \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}(h(x)k(x))$.

**Preuve**

**Remarque 3** On utilisera très souvent les propriétés suivantes sur les $\mathrm{o}(x^n)$ en 0.

Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels. Au voisinage de 0 :

- $x^n\mathrm{o}(x^p) = \mathrm{o}(x^{n+p})$ et $\dfrac{\mathrm{o}(x^n)}{x^p} = \mathrm{o}(x^{n-p})$.
- Si $n < p$, $\mathrm{o}(x^n) + \mathrm{o}(x^p) = \mathrm{o}(x^n)$.

Par exemple, au voisinage de 0 : $\boxed{\mathrm{o}(x^2) + \mathrm{o}(x^3) = \mathrm{o}(x^2)}$

**Attention Dans une somme, on est obligé de garder l'ordre le plus limitant!**

Exemple : au voisinage de 0, on a $x^3 = \mathrm{o}(x^2)$ et $x^4 = \mathrm{o}(x^3)$, mais $x^3 + x^4$ n'est pas négligeable devant $x^3$ au voisinage de 0 . En effet :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x^4}{x^3} = \lim_{x\to 0}(1+x) = 1 \neq 0$$

**Attention On ne peut pas « simplifier » des différences de o**

Si par exemple $f(x) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$ et $g(x) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$ alors $f(x) - g(x) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$ et non 0! En effet si $f(x) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$ et si $g(x) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$, il existe alors deux fonctions $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ définies au voisinage de 0 et qui tendent vers 0 quand $x$ tend vers 0 telles que $f(x) = x^3\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = x^3\varepsilon_2(x)$.
Alors, $f(x) - g(x) = x^3(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$ mais rien ne dit, et cela ne sera généralement pas le cas, que $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x)$.

# 3. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS AU VOISINAGE DE 0

## 3.1. Définition et premiers exemples

**Définition 2 | Développement limité d'ordre $n$ en 0**

Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Soit $0 \in \mathrm{I}$ ou au bord de I. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On dit que $f$ admet un **développement limité** d'ordre $n$ en 0 s'il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

Autrement dit, $f$ s'écrit comme la somme :

- d'une fonction polynôme, d'expression $\sum_{k=0}^{n} a_kx^k$, appelée la **partie régulière** du DL,
- d'une fonction négligeable devant $x^n$, d'expression $\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$, appelé le **reste** du DL.

**Notation**

Nous noterons $\mathrm{DL}_n(0)$ pour « développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0 » (attention, cette notation n'est pas du tout officielle).

**Exemple 3** Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} ]-1,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - x^2 + 2x^3 + x^3 \ln(1+x) \end{array} \right.$.
La fonction $f$ admet-elle un $\mathrm{DL}_3(0)$ ?

**Remarque 4** Si $f$ possède un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n),$$

alors : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a_0$ (par conséquent, si $f$ n'a pas de limite en 0, alors $f$ ne possède pas de développement limité en 0).

**Premiers développements limités usuels.** Comme étudié en introduction, la formule de sommation de termes géométriques nous permet aisément de déduire un premier développement limité usuel.

**Théorème 1 | $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ (développement limité géométrique)**

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

**Preuve** D'après la formule sur les sommes de termes géométriques, nous avons pour tout $x \neq 1$ :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \iff \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$
$$\iff \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^n \varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

**Exemple 4** Ecrire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{1}{1-x}$.

**Remarque 5** On a obtenu

$$\forall x \in ]-\infty,1[, \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) = \frac{x}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

D'où, pour tout $x \in ]1,+\infty[$,

On obtient :

**Théorème 2 | $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$**

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

**Substitution.** Plus généralement, à partir d'un DL en 0, on peut obtenir de nouveaux développements limités en 0 en **substitutant** « $x$ » par « $\lambda x^p$ » où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

En effet, si $f$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x^n),$$

on obtient (puisque $\lambda x^p \xrightarrow[x\to 0]{} 0$) :

$$f(\lambda x^p) = a_0 + (\lambda a_1) x^p + \ldots + (\lambda^n a_n) x^{np} + x^{np} \underbrace{(\lambda^n \varepsilon(x^{np}))}_{=\tilde{\varepsilon}(x)}, \quad \text{avec} \quad \tilde{\varepsilon}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$
$$= a_0 + \lambda a_1 x^p + \cdots + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{np})$$

**Exemple 5** Ecrire le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{1}{1-2x}$.

### 3.2. Premières propriétés des développements limités

**Proposition 6 | Unicité du DL**
Si $f$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors il est unique (les coefficients $a_0, \dots, a_n$ sont uniques).

**Remarque 6** On pourra noter l'analogie avec la propriété d'unicité des coefficients d'un polynôme. D'ailleurs, la propriété précédente la généralise.

**Preuve** Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $f$ une fonction définie au voisinage de 0 admettant deux $\mathrm{DL}_n(0)$ distincts : il existe deux $(n+1)$-listes de réels distinctes $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ telles que :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n) \quad \underline{\textbf{et}} \quad f(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

Soit alors $k$ le plus petit entier de $[\![0, n]\!]$ vérifiant $a_k \neq b_k$ ($k$ existe car les deux $(n+1)$-listes sont distinctes), en soustrayant les deux égalités précédentes on obtient :

$$0 = (a_k - b_k)x^k + (a_{k+1} - b_{k+1})x^{k+1} + \dots + (a_n - b_n)x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n).$$

Il existe alors un voisinage $\mathcal{V}_0$ de 0 et une fonction $\varepsilon$ définie sur $\mathcal{V}_0$ tels que :

$$\forall x \in \mathcal{V}_0, \quad 0 = (a_k - b_k)x^k + (a_{k+1} - b_{k+1})x^{k+1} + \dots + (a_n - b_n)x^n + x^n\varepsilon(x), \quad \lim_{x\longrightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

En divisant par $x^k$ lorsque $x \neq 0$ on a alors :

$$\forall x \in \mathcal{V}_0 \setminus \{0\}, \quad 0 = (a_k - b_k) + (a_{k+1} - b_{k+1})x + \dots + (a_n - b_n)x^{n-k} + x^{n-k}\varepsilon(x)$$

En passant à la limite lorsque $x$ tend vers 0 dans cette dernière égalité on trouve alors $0 = a_k - b_k$ ce qui est absurde car $a_k \neq b_k$ par définition.

**Corollaire 1 | DL d'une fonction paire / d'une fonction impaire**
Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0.
Si $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est paire (*resp.* impaire) et admet un DL en 0 à l'ordre $n$, alors la partie régulière ne contient que des termes de degré pairs (*resp.* impairs).

**Preuve** *(Dans le cas d'une fonction paire)*

**Proposition 7 | Troncature**
Si $f$ admet un DL d'un ordre $n$ donné au voisinage de 0, alors $f$ admet un DL à tout ordre $p \leq n$ au voisinage de 0.
Plus précisément, si $f$ admet le $\mathrm{DL}_n(0)$ suivant : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$, alors, pour tout $p \leq n$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^p)$$

**Preuve**

**Exemple 6** **(Une troncature d'un DL.)** On a vu que la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} ]-1,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - x^2 + 2x^3 + x^3 \ln(1+x) \end{array} \right.$ admet un $\mathrm{DL}_3(0)$ : $f(x) = x - x^2 + 2x^3 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$. Donc $f$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$ :

# 4. MÉTHODES D'OBTENTION D'UN DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

## 4.1. « Intégration » des DL

**Proposition 8 | « Intégration » des développements limités**
Si $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $0 \in \mathrm{I}$ et si $f$ admet en 0 un DL d'ordre $n$ du type

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

alors $f$ admet en 0 le DL d'ordre $n+1$ suivant :

$$f(x) = \boxed{f(0)} + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{n+1}\right)$$

**Preuve** Admis pour gagner du temps (on pourrait le faire, ce n'est pas très long mais un peu technique, cela utilise notamment l'inégalité des accroissements finis).

**Attention**
N'oubliez pas la quantité $\boxed{f(0)}$ en « intégrant » le développement limité !

**Remarque 7** Si vous ne voyez pas de formules à appliquer pour obtenir le développement limité d'une fonction (ou si le calcul semble trop compliqué), il peut être intéressant de dériver la fonction et de voir si le développement limité de la dérivée n'est pas plus facile à obtenir, puis d'intégrer ce développement limité.

**Exemple 7** Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} ]-\infty, 1[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1-x) \end{array} \right.$.

On obtient :

**Théorème 3 | $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1-x)$ et $x \mapsto \ln(1+x)$**

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

d'où :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$$

**Exemple 8** On rappelle que l'on a :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n).$$

**Théorème 4 | $\mathrm{DL}_n(0)$ de Arctan**

$$\operatorname{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right)$$

## 4.2. Utilisation de la formule de Taylor-Young

On énonce et on admet la formule de Taylor-Young, qui permet d'obtenir des développements limités de fonctions « suffisamment régulières ».

**Théorème 5 | Formule de Taylor-Young en 0**
Soit $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\boxed{\text{de classe } \mathscr{C}^n}$ sur un intervalle I contenant 0, $\boxed{\text{alors}}$ $f$ admet en 0 un DL à l'ordre $n$, à savoir :
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n).$$

**Preuve** Voir le chapitre de dérivation !

**Attention**
Il existe des fonctions admettant un développement limité à l'ordre $n$ mais qui ne sont pas $\mathscr{C}^n$. La formule de TAYLOR-YOUNG donne une **condition suffisante** uniquement pour l'existence d'un développement limité.

**Remarque 8** La formule de Taylor-Young permet d'écrire un développement limité à l'ordre $n$ pour toute fonction de classe $\mathscr{C}^n$ (dans les faits, cela permet surtout de justifier l'existence du développement limité, les calculs pouvant être rapidement compliqués : il n'est pas toujours facile de calculer les dérivées successives d'une fonction).

**Exemple 9** Ecrire le $\mathrm{DL}_n(0)$ de exp pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exemple 10** Ecrire le $\mathrm{DL}_5(0)$ de cos.

En appliquant la formule de Taylor Young énoncé dans le théorème ci-dessus, on peut obtenir les derniers développements limités usuels suivants.

**Théorème 6 | Développements limités provenant de TAYLOR-YOUNG**
$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)\\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)\\
\cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right)\\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right),\\
\sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right)\\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+2}\right),\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n),
\end{aligned}$$
pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Preuve** Ces fonctions étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0, elles admettent d'après la formule de TAYLOR-YOUNG un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

- $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ plus $\exp^{(k)} = \exp$ donc $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$ et on retrouve bien la formule attendue.
- Dans le chapitre précédent, nous avions établi des formules pour les dérivées successives de cos qui impliquent que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos(x), \quad \cos^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin(x).$$
En évaluant en zéro, on déduit :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \cos^{(2k)}(0) = (-1)^k, \ \cos^{(2k+1)}(0) = 0.$$
On retrouve alors bien la formule attendue en utilisant TAYLOR-YOUNG.
- Les formules analogues pour sin sont :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad \sin^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin(x), \quad \sin^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos(x).$$

En évaluant en zéro, on déduit :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sin^{(2k)}(0) = (-1)^k \sin(0) = 0, \quad \sin^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \cos(0) = (-1)^k.$$
On retrouve alors bien la formule attendue en utilisant TAYLOR-YOUNG.

- On pose $f_\alpha : x \longmapsto (1+x)^\alpha$. Alors $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_\alpha^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = f_\alpha(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f_\alpha^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. On remarque que $f_\alpha(0) = 1$ et on prouve de plus par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ :
$$f_\alpha^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1) f_{\alpha-k}$$
$$\iff f_\alpha^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1) f_{\alpha-k}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1).$$
On retrouve bien la formule attendue.

**Exemple 11** Par exemple, le DL à l'ordre 7 en 0 de sin est donné par
$$\begin{aligned}\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)\\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + o(x^7).\end{aligned}$$
Remarque intéressante, c'est aussi son DL à l'ordre 8 car le terme de degré 8 est nul : on peut remplacer $o(x^7)$ par $o(x^8)$.
Le DL de cos à l'ordre 2 en 0 est lui donné par
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

**Exemple 12** Ecrire de $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$.

### 4.3. Somme, produit, composée de DL

**SOMME DE DL, MULTIPLICATION PAR UN RÉEL.** Le développement limité d'une somme s'obtient relativement simplement, on somme les parties régulières de chaque développement limité.

**Proposition 9 | Somme de DL, multiplication d'un DL par une constante**
Supposons que $f$ et $g$ admettent des $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme $f(x) = \mathrm{P}_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ et $g(x) = \mathrm{Q}_n(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ :
$$(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda \mathrm{P}_n + \mu \mathrm{Q}_n)(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

**Exemple 13** Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\ln(1+x) + \sin(x) + x$.

**Attention** **Problème d'ordre**
La somme d'un DL d'ordre 3 et d'un DL d'ordre 4 donne un DL d'ordre 3. Plus généralement, la somme de deux DL d'ordre différents ne donne qu'un DL à l'ordre minimum. Calculer par exemple, la somme du $\mathrm{DL}_4(0)$ de sinus et du $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ :

**PRODUITS DE DL.** Pour obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ d'un produit de $\mathrm{DL}_n(0)$, on multiplie les parties régulières et on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à $n$.

**Proposition 10 | Produits de développements limités**

Supposons que $f$ et $g$ admettent des $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme $f(x) = \mathrm{P}_n(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$ et $g(x) = \mathrm{Q}_n(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n)$. Alors la fonction $fg$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ :

$$(fg)(x) = \mathscr{T}_n(\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n)(x) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^n),$$

où $\mathscr{T}_n(\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n)$ désigne la troncature à l'ordre $n$ du polynôme $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ (on ne garde que les termes de degrés inférieurs ou égaux à $n$).

**Attention Problème d'ordre**

Comme pour la somme de deux DL, le produit de deux DL d'ordre différents ne donne en général qu'un DL à l'ordre minimum. Par exemple le produit d'un $\mathrm{DL}_2(0)$ et d'un $\mathrm{DL}_3(0)$ ne donne (en général) pas un $\mathrm{DL}_3(0)$, ni un $\mathrm{DL}_6(0)$ mais un $\mathrm{DL}_2(0)$. Lorsque l'on cherche un DL à l'ordre $n$ d'une fonction qui peut être vue comme produit de fonctions usuelles, il faut donc écrire le DL de chaque fonction usuelle à l'ordre $n$ (on peut parfois réduire un peu l'ordre des fonctions dont on fait le produit pour limiter les calculs, on le verra dans les exemples ci-dessous).

**Exemple 14** Déterminer les développements limités suivants :

1. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\mathrm{e}^x\cos(x)$.
   - **[Echec]**
   - **[Réussite]**
2. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $(x^2+x)\ln(1+x)$.
   **(Réussite)**

**Remarque 9** **(Réussite optimale)** Ecrire un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\ln(1+x)$ aurait été suffisant (car on multiplie le $x$ par le $\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$).

3. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{\sin(x)}{1+x}$.

**Méthode** **Faire apparaître une expression dont on connaît le DL**

- *Pour $a \neq 0$ (et $a \neq 1$), comment obtenir un* $\mathrm{DL}(0)$ *de* $\dfrac{1}{a+x}$ *?*
  On connaît celui de $\dfrac{1}{1+x}$. Pour faire apparaître le « 1 », on factorise le dénominateur par $a$ :
  $$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{x}{a}}$$
- *Pour $a > 0$ (et $a \neq 1$), comment obtenir un* $\mathrm{DL}(0)$ *de* $\ln(a+x)$ *?*
  On connaît celui de $\ln(1+x)$. Pour faire apparaître le « 1 », on factorise par $a$ dans le logarithme puis on applique la formule : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ :
  $$\ln(a+x) = \ln\left(a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right) = \ln(a) + \ln\left(1+\frac{x}{a}\right).$$
- *Pour $a > 0$ (et $a \neq 1$), comment obtenir un* $\mathrm{DL}(0)$ *de* $\sqrt{a+x}$ *?*
  On connaît celui de $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$. Pour faire apparaître le « 1 », on factorise par $a$ dans la racine carrée :
  $$\sqrt{a+x} = \sqrt{a}\sqrt{1+\frac{x}{a}}.$$
- *Pour $a \neq 0$, comment obtenir un* $\mathrm{DL}(0)$ *de* $\mathrm{e}^{a+x}$ *?*
  On connaît celui de $\mathrm{e}^x$. On applique la formule $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$ :
  $$\mathrm{e}^{a+x} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^x.$$

**Exemple 15** Déterminer les développements limités suivants

1. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\dfrac{1}{3-x}$.

2. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sin(2x)\ln(2+x)$.

3. $\mathrm{DL}_1(0)$ de $\mathrm{e}^{-x}\sqrt{2+x}$.

**COMPOSÉES DE DL.** Commençons par une remarque préliminaire pour mieux comprendre les mélanges de petit « o » qui vont provenir des composées de DL.

**Remarque 10 (Nettoyages des o.)** On se place au voisinage de 0.

1. Simplifier : $\mathrm{o}(x^3 - 2x^4 + x^5 + \mathrm{o}(x^5))$.

2. De même, simplifier sans détailler $\mathrm{o}(x + \mathrm{o}(x^2))$ et $\mathrm{o}(x^2 + \mathrm{o}(x^7))$.

**Proposition 11 | Composition de développements limités**

Soient I et J deux intervalles tels que $0 \in \mathrm{I}$ et $0 \in \mathrm{J}$. Si :

$$\begin{cases} f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ admet en 0 un DL d'ordre } n, \\ g : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ admet en 0 un DL d'ordre } n, \\ g(\mathrm{J}) \subset \mathrm{I} \ (g \text{ est à valeurs dans } \mathrm{I}), \\ \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0, \end{cases}$$

alors $f \circ g$ admet admet en 0 en DL d'ordre $n$ dont la partie régulière est composée des parties régulières en ne conservant que les termes de degré au plus $n$.

**Remarque 11 (Obtenir le DL d'une composée)** En pratique, pour obtenir pour obtenir un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $g(f(x))$ : on écrira le DL de $f(x)$ (on commence par « l'intérieur » de l'expression), puis on reconnaît une expression dont on connaît le DL, du type $\ln(1+\mathrm{X})$, $\sin(\mathrm{X})$, *etc.* en posant $\mathrm{X} = a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ (où X désigne le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f(x)$).

**Attention**

- Ne pas oublier de vérifier que $\boxed{\mathrm{X} \xrightarrow[x \to 0]{} 0}$
- Le petit « o » du X ne doit pas disparaître lorsqu'on remplace X par son expression. En général, dans n'importe quel calcul de DL, les petits « o » ne doivent jamais disparaître dans des égalités, à moins d'appliquer une règle du type $\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$ où un des petits « o » disparaît (car il rentre dans l'autre petit « o »).

Le premier DL (celui de $f(x)$ doit (en général) être à l'ordre $n$ pour obtenir un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la composée. En revanche, pour le second DL (celui de $g(x)$), un ordre plus petit est souvent suffisant. Pour éviter des calculs laborieux (ordre trop élevé, expression gigantesque...), voilà ce que je vous conseille :

- Ecrire X = .... Que vaut o(X) ? (prendre la puissance la plus petite de l'expression X, par exemple, pour $\mathrm{X} = \underset{x\to 0}{o}(x)$, on a $o(\mathrm{X}) = \underset{x\to 0}{o}(x)$, et pour $\mathrm{X} = x^2 + x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$, on a $o(\mathrm{X}) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$). Si on obtient $o(\mathrm{X}) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$, on s'arrête là, l'ordre 1 du DL de $g$ est suffisant, sinon, on continue.
- Calculer $\mathrm{X}^2 = \ldots$. Que vaut $o(\mathrm{X}^2)$ ? Si $o(\mathrm{X}^2) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$, on s'arrête là, l'ordre 2 est suffisant.
- *etc.*
- Ensuite, une fois l'ordre déterminé, on écrit la formule avec des X, par exemple $\ln(1+\mathrm{X}) = \mathrm{X} - \dfrac{\mathrm{X}^2}{2} + \underset{\mathrm{X}\to 0}{o}(\mathrm{X}^2)$, et on remplace dans cette formule les $\mathrm{X}, \mathrm{X}^2, o(\mathrm{X}^2)$ (tout est déjà calculé).

**Exemple 16** Déterminer les développements limités suivants.

1. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\ln(\cos(x))$.

**2.** $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\dfrac{1}{\cos(x)}$.

**3.** $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\tan(x)$.

### Quotients de DL.

**Proposition 12 | Développement limité d'un quotient**

Soient $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions admettant un DL d'ordre $n$.

Si : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0}$, alors $\dfrac{f}{g}$ admet en 0 un DL d'ordre $n$.

**Preuve** Si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$, et si $g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n),$$

alors $a_0 \neq 0$ car $a_0 = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$, et

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a_0}\,\frac{1}{1 + \underbrace{\tfrac{a_1}{a_0}x + \cdots + \tfrac{a_n}{a_0}x^n + o_0(x^n)}_{\mathrm{X}\ \text{avec}\ \mathrm{X}\xrightarrow[x\to 0]{} 0}}$$

On obtient un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{g(x)}$ grâce à $\dfrac{1}{1+\mathrm{X}} = 1 - \mathrm{X} + \mathrm{X}^2 + \cdots + (-1)^n \mathrm{X}^n + \underset{\mathrm{X}\to 0}{o}(\mathrm{X}^n)$.

Il peut être plus judicieux d'écrire :

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a_0}\,\frac{1}{1-\mathrm{X}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{X} = -\frac{a_1}{a_0}x - \cdots - \frac{a_n}{a_0}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

pour utiliser le développement limité $\dfrac{1}{1-X} = 1+X+X^2+\cdots+X^n + \underset{X\to 0}{o}(X^n)$.

Pour obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, on effectue le produit $f(x)\times\dfrac{1}{g(x)}$.

**Exemple 17** Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{\sin(x)}{\ln(1+x)}$.

## 5. GÉNÉRALISATION : DÉVELOPPEMENT LIMITÉ EN $x_0$ ET EN L'INFINI

### 5.1. Cas $x_0 \in \mathbb{R}$

On calcule les développements limités en un point autre que 0 en s'y ramenant par translation. Ainsi, pour calculer un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ de $x \longmapsto f(x)$, on calcul un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $h \longmapsto f(x_0+h)$ et on conclut via le changement de variable $x = x_0 + h$.

**Définition 3 | Développement limité en $x_0 \in \mathbb{R}$**

Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $x_0$, $f$ admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ si la fonction $h \mapsto f(x_0+h)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$. On a alors :

$$f(x_0+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n),$$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n).$$

**Méthode Obtenir un DL en $x_0 \neq 0$**

Pour calculer un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ avec $x_0 \neq 0$, on pose $h = x - x_0$ pour se ramener en 0.

**Exemple 18** Déterminer le $\mathrm{DL}_2(1)$ de $\exp(x)$.

**Attention**

Ne pas développer $(x-1)^2$, $(x-1)^3$, ...

**Remarque 12** La formule de Taylor-Young (généralisée ci-après) permet de garantir l'existence d'un développement limité d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage d'un point $x_0$ (encore une fois, les coefficients du développement limité peuvent être compliqués à calculer en utilisant cette formule).

**Théorème 7 | Formule de Taylor-Young**

Soit I un intervalle. Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et $x_0 \in \mathrm{I}$, alors :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \underset{x \to x_0}{o}((x - x_0)^n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n)$$

**Preuve** Admis une nouvelle fois !

**Remarque 13** Pour des petits ordres cela, donne :

- ordre 0 : $f(x) = f(x_0) + \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}(1)$
- ordre 1 : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}(x - x_0)$
- ordre 2 : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}((x-x_0)^2)$.

## 5.2. Au voisinage de l'infini

**Définition 4 | DL en $\pm\infty$**

$f$ admet un $\mathrm{DL}_n(+\infty)$ si $h \mapsto f\left(\frac{1}{h}\right)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0^+)$. On a alors :

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \underset{h\to 0^+}{o}(h^n),$$
$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

La définition s'adapte pour les développements limités au voisinage de $-\infty$.

**Remarque 14** On dit aussi que l'on a obtenu un **développement asymptotique** de $f$ en $\pm\infty$.

**Méthode Obtenir un DL en $\pm\infty$**

- On pose le changement de variable : $\mathrm{X} = \dfrac{1}{x} \iff x = \dfrac{1}{\mathrm{X}}$ et ainsi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathrm{X} = 0$.
- On remplace tous les $x$ par des $\dfrac{1}{\mathrm{X}}$ pour obtenir une expression ne contenant que X
- On calcule le DL à l'ordre $n$ en 0 par rapport à la variable X.
- On remplace alors tous les X par $\dfrac{1}{x}$.

**Exemple 19 (Développements limités en $\pm\infty$)**

**1.** Déterminer le $\mathrm{DL}_2(-\infty)$ de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+2x}$.

**2.** Déterminer le $\mathrm{DL}_3(+\infty)$ de $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x}$.

## 6. APPLICATION DES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

### 6.1. Limites et équivalents

**RECHERCHE DE LIMITES.** L'utilisation des développements poussés jusqu'au « bon ordre » permet d'obtenir des limites en cas de formes indéterminées (si les équivalents ne fonctionnent pas).

**Exemple 20** Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-x}{x^3}$.

**EQUIVALENTS.** Derrière un petit o, il y a toujours un équivalent (et réciproquement).

**Proposition 13 | Lien petit o / équivalence**

Pour toutes fontions $f$ et $g$ définies au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) = g(x) + \underset{x\to x_0}{o}(g(x)).$$

**Preuve**

**Proposition 14 | Développements limités et équivalents**

Si $f$ une fonction admettant un développement limité écrit sous la forme suivante :

$$f(x) = a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n),$$

avec $\boxed{a_p \neq 0}$, alors : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$

Note — *Ainsi, une fonction est équivalente au premier terme non nul de son développement limité*

**Preuve**

### 6.2. Continuité et dérivabilité

**Proposition 15 | Développement limité, continuité & dérivabilité**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $f$ une fonction <u>**définie en**</u> $x_0$ et au voisinage de $x_0$.

- $f$ est continue en $x_0 \iff \begin{cases} f \text{ admet un } \mathrm{DL}_0(x_0), \text{c'est-à-dire :} \\ \exists a_0 \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + \underset{x\to x_0}{o}(1). \end{cases}$

  Dans ce cas : $a_0 = f(x_0)$.

- $f$ est dérivable en $x_0 \iff \begin{cases} f \text{ admet un } \mathrm{DL}_1(x_0), \text{c'est-à-dire :} \\ \exists a_0, a_1 \in \mathbb{R},\ f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x-x_0). \end{cases}$

  Dans ce cas : $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$.

**Preuve**

- 

- $\boxed{\Longrightarrow}$ On a $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$. Posons pour tout $x$ dans un voisinage de $x_0$ :

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0) & 0 \text{ si } x\neq x_0,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors puisque $f$ est dérivable en $x_0$, on vérifie sans difficulté que $\varepsilon(x)\xrightarrow[x\longrightarrow x_0]{}0$ et :

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0)$$

En effet, si $x=x_0$ l'égalité est $f(x_0)=f(x_0)$, et si $x\neq x_0$, on a :

$$f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\varepsilon(x)(x-x_0)$$

$$=f(x_0)+\cancel{(x-x_0)f'(x_0)}+\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{\cancel{x-x_0}}-\cancel{f'(x_0)}\right)(x-x_0)=f(x)$$

pour tout $x$ dans un voisinage de $x_0$. Donc $f$ possède bien un $\mathrm{DL}_1(x_0)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}(x-x_0)$ avec $a_0,a_1\in\mathbb{R}$. On a déjà vu que nécessairement $a_0=f(x_0)$. Alors le développement limité donne :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a_1+\underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}(1)\Longrightarrow\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a_1.$$

Donc $f$ est dérivable en $x_0$ avec $f'(x_0)=a_1$.

**Attention**

Cet énoncé ne se généralise **pas** pour des valeurs supérieures de l'ordre du développement limité. Par exemple, posséder un développement limité à l'ordre 2 en un point n'implique pas nécessairement d'être deux fois dérivable en ce point.

**Exemple 21** **(Contre-exemple)** Par exemple, l'application

$$f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \begin{cases}x^3\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

admet un $\mathrm{DL}_2(0)$.

Pourtant, $f'$ n'est pas continue en 0, donc $f$ n'estpas deux fois dérivable.

Les propositions précédentes sont utiles, mais exigent que la fonction soit définie au point où l'on effectue le développement limité, mais les développements limités peuvent aussi servir à prolonger des fonctions comme nous allons le voir.

**Proposition 16 | Développement limité et prolongement**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $f$ une fonction définie sur un voisinage de $x_0$ mais **non définie en** $x_0$. Alors :

- si $f$ admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$, c'est-à-dire :
$$f(x) = a + b(x - x_0) + \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}(x - x_0), \qquad \text{avec } a, b \in \mathbb{R},$$
alors la fonction $f$ se prolonge par continuité en $x_0$, en posant $f(x_0) = a$.
- De plus, la fonction ainsi prolongée est dérivable en $x_0$ de dérivée égale à $b$.

**Preuve**

Les développements limités à l'ordre 0 ou 1 permettent de prolonger par continuité des fonctions en un point et d'établir la dérivabilité en ce point de la fonction ainsi prolongée.

**Méthode — Prolongement à l'aide d'un développement limité**

Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $x_0$ mais *non définie en* $x_0$.

- Si $f$ admet un $\mathrm{DL}_0(x_0)$ : $f(x) = a_0 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(1)$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a_0$ et on peut donc prolonger $f$ par continuité en $x_0$ en posant $f(x_0) = a_0$.
- Si $f$ admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$ : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x - x_0)$, alors on peut donc prolonger $f$ par continuité en $x_0$ en posant $f(x_0) = a_0$ et la nouvelle fonction ainsi prolongée est dérivable en $x_0$ puisqu'elle admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$, on a alors $f'(x_0) = a_1$.

**Exemple 22** Étudier l'existence d'un prolongement continu en zéro pour $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$, étudier la dérivabilité du prolongement.

**Attention**

Un développement limité en $x_0$ ne donne une information sur $f$ qu'au voisinage de $x_0$ : il serait donc absurde de conclure à la dérivabilité de $f$ sur $\mathbb{R}$ à partir de l'existence d'un développement limité de $f$ en, par exemple, 0.

## 6.3. Etude locale d'une courbe

*Remarque préliminaire.* Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $a \in \mathbb{R}^*$, alors $\quad a + \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}(1) \quad$ est du signe de $a$ pour $x$ assez proche de $x_0$ (car $\underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}(1)$ est une fonction qui tend vers 0 en $x_0$).

**Proposition 17 | Lien entre développement limité et tangente**

Si $f$ admet un développement limité en $x_0$ à l'ordre $p$ de la forme :
$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + \underset{x\to x_0}{\mathrm{o}}((x - x_0)^p) \qquad \text{avec } a_p \neq 0 \text{ et } p \geq 2$$
alors :

- $\mathscr{C}_f$ admet en $x_0$ une tangente $\mathscr{T}$ d'équation : $y = a_0 + a_1(x - x_0)$
- la position locale de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{T}$ est donnée par le signe de $a_p(x - x_0)^p$.

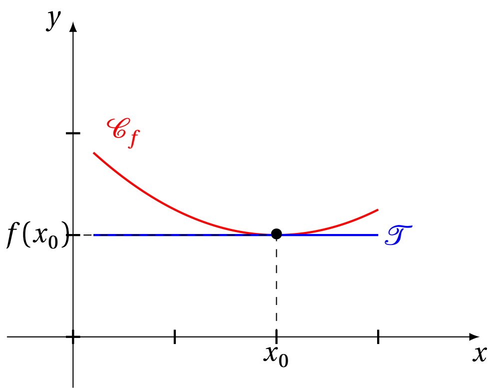
On retiendra que :
$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x - x_0)}_{\text{Donne l'équation de la tangente en } x_0} + \underbrace{a_p(x - x_0)^p}_{\text{Donne la position par rapport à la tangente}} + \underset{x\to x_0}{o}((x - x_0)^p)$$

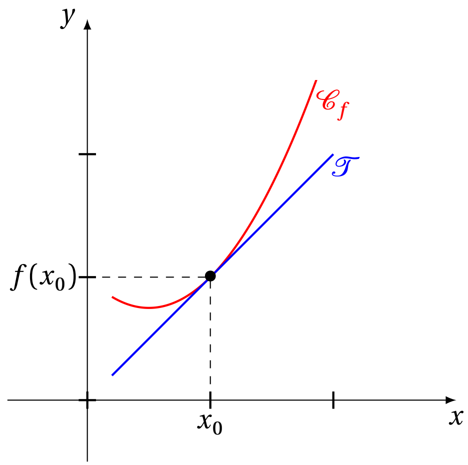
**Preuve** *(Idée de la preuve)*

**Remarque 15** **(Extremums locaux)** Si $a_1 = 0$ dans l'écriture précédente de la Proposition 17, la tangente est horizontale. Ainsi, dans le cas où <u>$p$ **est pair**</u>, on obtient

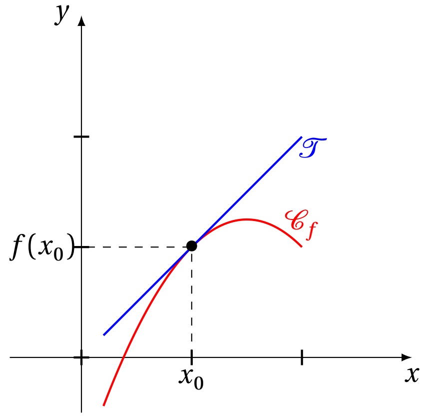
- si $a_p > 0$, $f$ possède un minimum local en $x_0$,
- si $a_p < 0$, $f$ possède un maximum local en $x_0$.

On représente ci-dessous le cas où $p$ est pair avec $a_p > 0$.

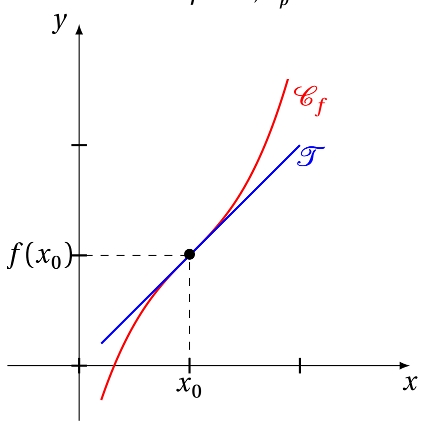


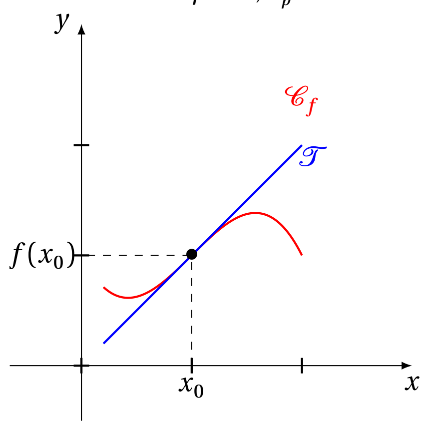

Cas $p$ pair, $a_p > 0$




Cas $p$ pair, $a_p < 0$




Cas $p$ impair, $a_p > 0$ (point d'inflexion)




Cas $p$ impair, $a_p < 0$ (point d'inflexion)

Allure locale d'une courbe en un point

### 6.4. Etude d'une fonction au voisinage de l'infini, asymptote oblique

**Définition 5 | Asymptote oblique**

La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction $f$ si :

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0,$$

c'est-à-dire si : $\quad f(x) = ax + b + \underset{x\to\pm\infty}{o}(1).$

**Remarque 16** Si on a $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$. Si $c \neq 0$, le signe de $c$ donne la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote (si $c = 0$, il faut pousser plus loin le développement limité).

**Exemple 23 (A faire sur votre cahier d'exercice)** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ par $f(x) = \frac{x^2}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$. Montrer que $\mathscr{C}_f$ a une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$. Quelle est la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à ces asymptotes ?

## 7. EXERCICES

*La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.*

**Savoir-faire**

1. Concernant les développements limités :
   - connaître la définition d'un développement limité ........................ ☐
   - savoir obtenir des développements limités (somme, produit, composée, troncature, quotient, intégration) ........................ ☐
   - connaître les développements limités usuels ........................ ☐
2. Savoir utiliser la formule de TAYLOR-YOUNG pour déterminer des développements limités ........................ ☐
3. Savoir utiliser les développements limités :
   - pour déterminer des limites et des équivalents ........................ ☐
   - pour prolonger des fonctions ........................ ☐
   - pour déterminer des positions relatives ........................ ☐

### 7.1. Recherche de développements limités

**Exercice 1 | Développements limités, première fournée.** Solution Calculer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $\frac{1}{1-x} - e^x$
2. $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$
3. $DL_3(0)$ de $\mathrm{Arctan}(x^3)$
4. $DL_3(0)$ de $\cos(\sqrt{x})$
5. $DL_2(0)$ de $2^x - 1$
6. $DL_4(0)$ de $\sin(2x)$
7. $DL_3(0)$ de $\frac{\cos(x)-1}{x}$
8. $DL_3(0)$ de $e^x \sin(x)$
9. $DL_4(0)$ de $\cos(x)\ln(1+x)$
10. $DL_3(0)$ de $(x^3+1)\sqrt{1-x}$
11. $DL_4(0)$ de $(\ln(1+x))^2$
12. $DL_6(0)$ de $\sin x \cos(2x)$

**Exercice 2 | Développements limités, deuxième fournée.** Solution

Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_3(0)$ de $\frac{1}{3+x}$.
2. $DL_3(0)$ de $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$
3. $DL_4(0)$ de $\exp(\cos x)$
4. $DL_2(0)$ de $\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^5$
5. $DL_2(0)$ de $\frac{\sqrt{1+x}}{\cos^3 x}$

**Exercice 3 | Dérivée $n$-ième en 0 d'une fonction.** Solution

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) \mapsto \dfrac{x^3}{1+x^6}$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\dfrac{x^3}{1+x^6} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k x^{6k+3} + o\left(x^{6p+3}\right)$
2. En déduire la valeur de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 4 | Sur le développement limité de tan.** Solution L'objectif de cet exercice est de déterminer un développement limité de tangente suivant plusieurs méthodes.

1. Pourquoi tan admet-elle un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout $n$ ?
2. En utilisant la formule de Taylor-Young, déterminer un développement limité à l'ordre 2 de tangente.
3. Méthode par unicité.
   - **3.1)** Expliquer pourquoi $\tan'$ admet un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de 0 (pour tout entier $n$).
   - **3.2)** On note $\tan'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$. Déterminer en fonction des $a_i$ le développement limité de tan au voisinage de 0.
   - **3.3)** En utilisant la relation $\tan' = 1+\tan^2$, en déduire une relation sur les $a_i$, puis déterminer ceux-ci.
4. Méthode par polynôme.
   Soit $(\mathrm{P}_n)$ la suite de polynôme définie par $\mathrm{P}_0(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$ et pour tout entier $n$, $\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{X}) = (1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_n'(\mathrm{X})$.
   - **4.1)** Déterminer $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$ et $\mathrm{P}_5$.
   - **4.2)** Montrer par récurrence sur , $n$ que pour tout réel $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a
     $$\tan^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n(\tan(x))$$
   - **4.3)** En déduire $\tan^{(n)}(0)$ pour tout $n \in [\![1,5]\!]$, puis un développement limité de tan à l'ordre 6 au voisinage de 0.

## 7.2. Calculs de limites

**Exercice 5 | Calculs de limites.** Solution Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-\mathrm{e}^x}{1-\cos x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$

**Exercice 6 | Limite or not limite ?** Solution

Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{ax} - 2}{x^2}$ admette une limite finie en $0^+$. Déterminer cette limite le cas échéant.

## 7.3. Allures locales de courbes

**Exercice 7 | Allures locales de courbes, version 1** Solution Calculer les DL suivants, et en déduire la limite de la fonction au point considéré $x_0$, la dérivabilité de la fonction prolongée en $x_0$, l'équation de sa tangente en $x_0$ ainsi que la position relative de la courbe par rapport à cette tangente :

1. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.
2. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $g(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{1+x}$.

**Exercice 8 | Allures locales de courbes, version 2** Solution

Pour les fonctions suivantes, déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $a$ ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente (aller jusqu'à l'ordre 2 suffit dans cet exercice).

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{3+\sin(x)}$ en $a=0$
2. $f : x \mapsto \ln(1+x)$ en $a=1$

**Exercice 9 | Allure locale d'une courbe, version 3.** Solution On rappelle que, pour tous nombres réels $a$ et $b$ :

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a),$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b).$$

1. En déduire l'expression de $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$ (lorsque $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a+b)$ existent).
2. Calculer le $\mathrm{DL}_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ de $f(x) = \ln(\tan x)$ (on pourra utiliser le développement limité démontré en cours : $\tan(h) = h + \dfrac{1}{3}h^3 + \underset{h\to 0}{o}(h^3)$)
3. Préciser l'allure de $\mathscr{C}_f$ au voisinage du point d'abscisse $\dfrac{\pi}{4}$.

## 7.4. Développement limité d'une fonction réciproque

**Exercice 10** | Solution Soit la fonction $f$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan x + \mathrm{e}^x - 1.$$

1. Étudier $f$ et en dessiner la courbe dans un repère orthonormé.
2. Montrer que $f$ induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.
3. Soit $g$ la réciproque de la bijection précédente. Montrer que $g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I. En déduire que $g$ admet, en tout point de I, des développements limités à tout ordre.
4. En utilisant le fait que $g \circ f = \mathrm{Id}_\mathbb{R}$, donner un développement limité de $g$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

**Exercice 11** | Solution

1. Montrer que la fonction $f : x \longrightarrow \mathrm{e}^x + x - 1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que sa fonction réciproque $f^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Former le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f^{-1}$.

## 7.5. Développement limité et régularité

**Exercice 12** | Solution Soit la fonction $f$ définie sur $]0,1[\, \cup\, ]1,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 1}.$$

1. Montrer que $f$ admet un prolongement par continuité en 1.
2. Ce prolongement est-il dérivable ?
3. Montrer que $f$ admet un prolongement par continuité en 0.
4. Ce prolongement est-il dérivable ?

**Exercice 13** | Solution Soit $a$ un paramètre réel. On définit la fonction $f$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{-x}} + \mathrm{e}^{-\sqrt{-x}}}{2} & \text{si} \quad x < 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de $a$ la fonction $f$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$ ?
2. On suppose désormais que $a$ est égal à la valeur trouvée à la question 1. Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée $f'(x)$ pour tout $x$ réel.

**Exercice 14** | Solution Soit la fonction $f$ définie par : $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + x + x^2}$. Calculer $f^{(4)}(0)$, sans calculer explicitement la dérivée $f^{(4)}$.

## 7.6. Asymptote oblique en $+\infty$

On dit qu'une fonction $f$ définie au voisinage de $+\infty$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax+b) = 0)$.

1. Déterminer un développement asymptotique d'ordre 2 de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1} e^{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$ au voisinage de $+\infty$.
2. En déduire que $f$ admet en $+\infty$ une asmptote oblique dont on précisera l'équation.
3. A partir du développement asymptotique d'ordre 2 de $f$ au voisinage de $+\infty$, montrer que la courbe représentant $f$ est au-dessus de son asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.