Devoir maison n°8
à rendre le Jeudi 14/03/2024

Consignes

- Les devoirs maison sont facultatifs. Pour autant, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.**

Exercice 1 | Tirages de boules dans une urne Solution

Dans tout l'exercice, n est un entier fixé dans $\mathbb{N}^*$. On dispose de trois urnes :

- l'urne n°1 contient deux boules rouges et trois boules bleues ;
- l'urne n°2 contient une boule rouge et aucune boule bleue ;
- l'urne n°3 contient une boule bleue et aucune boule rouge.

On réalise l'expérience suivante : on choisit au hasard l'une des trois urnes puis, sans plus changer d'urne, on y effectue n tirages successifs avec remise d'une boule.

Pour $i \in [\![1;3]\!]$, on note U_i l'événement : « l'urne choisie pour effectuer les tirages est l'urne n° i ».

Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note R_k l'événement : « le résultat du k-ième tirage est une boule rouge ».

1. Soit $k \in [\![1;n]\!]$.
  - **(a)** Donner les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{U_1}(R_k), \mathbb{P}_{U_2}(R_k)$ et $\mathbb{P}_{U_3}(R_k)$. En déduire que $\mathbb{P}(R_k) = \dfrac{7}{15}$.
  - **(b)** Si l'on a tiré une boule rouge au k-ième tirage, quelle est la probabilité que l'urne choisie pour effectuer les tirages est l'urne n°2 ?

2.
  - **(a)** Déterminer, en justifiant la réponse, les valeurs de $\mathbb{P}_{U_1}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right)$, $\mathbb{P}_{U_2}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right)$ et de $\mathbb{P}_{U_3}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right)$.
  - **(b)** En déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + \dfrac{1}{3}$.
  - **(c)** Montrer que les événements R_1 et R_2 ne sont pas indépendants.
  - **(d)** Pour $k \in [\![2;n]\!]$, montrer que $\mathbb{P}_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{k-1}}(R_k) = \dfrac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^k}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}}$.

3. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note A_k l'événement : « une boule bleue apparaît pour la première fois au tirage numéro k ».
On note également A l'événement : « aucune boule bleue n'apparaît lors des n tirages ».
  - **(a)** Calculer $\mathbb{P}(A_1)$.
  - **(b)** Soit $k \in [\![2;n]\!]$. Exprimer A_k en fonction des événements R_k. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(A_k)$ en fonction de $k \geqslant 2$.
  - **(c)** Expliciter l'événement $\overline{A}$ et l'exprimer à l'aide des événements $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$. Calculer alors la probabilité de l'événement A. Quel résultat obtenu précédemment retrouve-t-on ?

Exercice 2 | Méthode CMR Solution

On souhaite évaluer le nombre de rats qui vivent dans les égouts de Paris. Pour cela, on utilise la méthode CMR (Capture/Marquage/Recapture) suivante : on capture 1000 rats que l'on marque (en les baguant, par exemple). Une semaine plus tard, on capture à nouveau 1000 rats et on compte le nombre de rats qui sont marqués. On en trouve 10.

On suppose qu'il y a n rats au total. Le but de l'exercice est d'estimer la valeur de n.

1. Combien y-a-t-il de façons possibles de capturer 1000 rats parmi les n rats de Paris ?

2. On note p_n la probabilité de l'événement A : « Il y a 10 rats marqués parmi ceux que l'on a capturés ». Exprimer p_n en fonction de n.

3. Montrer que : $\dfrac{p_n}{p_{n+1}} = \dfrac{n^2-1988n-1989}{n^2-1998n+10^6-1999}$ puis comparer la valeur de ce quotient avec 1.

4. En déduire que (p_n) admet un maximum pour un certain n_0 à déterminer. Expliquez en quoi n_0 a de grandes chances d'être une bonne estimation du nombre de rats qui vivent dans les égouts de Paris.

Le maximum que l'on a trouvé est appelé maximum de vraisemblance.
C'est le nombre total de rats pour lequel notre observation est la plus probable.

CORRECTION

Solution (exercice 1) Énoncé

1. (a) L'urne étant choisie, les tirages sont alors indépendants (car avec remise). On a donc :

$$\boxed{\mathbb{P}_{U_1}(R_k) = \frac{2}{5}} \quad ; \quad \boxed{\mathbb{P}_{U_2}(R_k) = 1} \quad ; \quad \boxed{\mathbb{P}_{U_3}(R_k) = 0}$$

La famille (U_1, U_2, U_3) forme un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_k) &= \mathbb{P}(U_1) \times \mathbb{P}_{U_1}(R_k) + \mathbb{P}(U_2) \times \mathbb{P}_{U_2}(R_k) + \mathbb{P}(U_3) \times \mathbb{P}_{U_3}(R_k) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0.\end{aligned}$$

Finalement, on a : $\boxed{\mathbb{P}(R_k) = \frac{7}{15}}$

(b) On cherche à déterminer $\mathbb{P}_{R_k}(U_2)$. Par la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{R_k}(U_2) = \frac{\mathbb{P}_{U_2}(R_k)\mathbb{P}(U_2)}{\mathbb{P}(R_k)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{7}{15}} = \frac{15}{7} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{5}{7}}$$

2. (a) Une fois l'urne choisie, les tirages (avec remise) sont indépendants donc les événements $(R_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont mutuellement indépendants donc :

$$\mathbb{P}_{U_1}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{U_1}(R_k) \overset{1.(a)}{=} \prod_{k=1}^{n} \frac{2}{5}, \text{ c'est-à-dire } \boxed{\mathbb{P}_{U_1}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

On a de même :

$$\mathbb{P}_{U_2}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{U_2}(R_k) \overset{1.(a)}{=} \prod_{k=1}^{n} 1, \text{ c'est-à-dire } \boxed{\mathbb{P}_{U_2}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) = 1}$$

$$\mathbb{P}_{U_3}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{U_3}(R_k) \overset{1.(a)}{=} \prod_{k=1}^{n} 0, \text{ c'est-à-dire } \boxed{\mathbb{P}_{U_3}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) = 0}$$

(b) La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (U_1, U_2, U_3) donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) &= \mathbb{P}(U_1) \times \mathbb{P}_{U_1}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) + \mathbb{P}(U_2) \times \mathbb{P}_{U_2}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) + \mathbb{P}(U_3) \times \mathbb{P}_{U_3}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) \\ &\overset{2.(a)}{=} \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0.\end{aligned}$$

Finalement, on a : $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} R_k\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{3}}$

(c) Avec la question 1.(a), on sait que : $\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_2) = \frac{7}{15}$. Avec la question 2.(b), on sait que : $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{3}$. On en déduit que $\mathbb{P}(R_1 \cap R_2) = \frac{29}{75} \neq \frac{49}{225} = \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}(R_2)$ (les valeurs des fractions sont bien différentes car $\frac{29}{75} = \frac{87}{225}$), donc :

$$\boxed{\text{Les événements } R_1 \text{ et } R_2 \text{ ne sont pas indépendants}}$$

(d) Soit $k \in [\![2; n]\!]$. En utilisant la question 2.(b) et la définition d'une probabilité conditionnelle, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(R_k) &= \frac{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} R_i\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} R_i\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^k + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + \frac{1}{3}} \\ &= \frac{\cancel{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^k + 1\right)}{\cancel{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} + 1\right)} \\ &= \boxed{\frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^k}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}}}\end{aligned}$$

3. (a) On a $A_1 = \overline{R_1}$ donc $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}\left(\overline{R_1}\right) = 1 - \mathbb{P}(R_1) \overset{1.(a)}{=} 1 - \frac{7}{15} = \boxed{\frac{8}{15}}$

(b) Pour $k \geqslant 2$, on a $A_k = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k}$. Or, les événements $(R_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ ne sont pas mutuellement indépendants puisque, d'après la question 2.(c), ils ne le sont pas deux à deux. On utilise alors la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_k) &= \mathbb{P}\left(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap \overline{R_k}\right) \\ &= \mathbb{P}(R_1) \times \mathbb{P}_{R_1}(R_2) \times \mathbb{P}_{R_1 \cap R_2}(R_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-2}}(R_{k-1}) \\ &\qquad \times \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}\left(\overline{R_k}\right) \\ &= \frac{7}{15} \times \frac{\cancel{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2}}{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^1} \times \frac{\cancel{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^3}}{\cancel{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2}} \times \cdots \times \frac{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}}{\cancel{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^{k-2}}} \times \left(1 - \mathbb{P}_{R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(R_k)\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{7}{15}\times\frac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}}{\frac{7}{5}}\times\left(1-\frac{1+\left(\frac{2}{5}\right)^{k}}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}-\left(\frac{2}{5}\right)^{k}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\left(1-\frac{2}{5}\right)$$

Finalement, on a, pour $k \geqslant 2$: $\boxed{\mathbb{P}\left(A_k\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}}$

> **Remarque 1** On aurait aussi pu utiliser la relation :
> $\mathbb{P}\left(R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{k-1}\cap\overline{R_k}\right)=\mathbb{P}\left(R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_{k-1}\right)\times\mathbb{P}_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}\left(\overline{R_k}\right)$
> ce qui fournit une réponse plus rapide à la question (les deux probabilités conditionnelles pouvant se calculer avec la question **2.(d)**).

(c) $\overline{A}$ est l'événement « au moins une boule bleue apparaît lors des n tirages ».
Ainsi, $\bar{A}=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.
Les événements $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont incompatibles (car il n'est pas possible de tirer une boule bleue pour la première fois lors de deux tirages différents!) donc (attention d'isoler $\mathbb{P}\left(A_1\right)$) :

$$\mathbb{P}(\overline{A})=\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_k\right)$$
$$=\frac{8}{15}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$$
$$=\frac{8}{15}+\frac{2}{25}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{2}{5}\right)^{k}$$
$$=\frac{8}{15}+\frac{2}{25}\times\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{5}}.$$

Finalement, $\mathbb{P}(\overline{A})=\frac{2}{3}-\frac{2}{15}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n}$.

Donc, puisque $\mathbb{P}(A)=1-\mathbb{P}(\overline{A})$, on a $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n}$

On retrouve le résultat de la question 2.(b) ce qui est heureux puisque $A=\bigcap_{k=1}^{n}R_k$!

Solution (exercice 2) Énoncé

1. Les rats sont choisis au hasard, sans ordre et sans remise. On en déduit que capturer 1000 rats parmi les n possibles revient à créer une 1000-combinaison d'éléments choisis dans un ensemble à n éléments. Il y a donc $\boxed{\mathrm{Card}(\Omega)=\binom{n}{1000}}$ façons de capturer 1000 rats parmi les n rats de Paris.

2. Pour réaliser l'événement A, il faut choisir 10 rats parmi les 1000 rats marqués $\left(\text{il y a }\binom{1000}{10}\text{ façons}\right)$ et aussi choisir 990 rats parmi les $n-1000$ rats non marqués $\left(\text{il y a }\binom{n-1000}{990}\text{ façons}\right)$.

Par le principe multiplicatif : $\mathrm{Card}(A)=\binom{1000}{10}\times\binom{n-1000}{990}$.

Les rats ayant tous la même probabilité d'être choisis, on en déduit :

$$p_n=\frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}=\boxed{\frac{\binom{1000}{10}\times\binom{n-1000}{990}}{\binom{n}{1000}}}$$

3. Avec ce qui précède :

$$\frac{p_n}{p_{n+1}}=\frac{\cancel{\binom{1000}{10}}\times\binom{n-1000}{990}}{\binom{n}{1000}}\times\frac{\binom{n+1}{1000}}{\cancel{\binom{1000}{10}}\times\binom{n+1-1000}{990}}$$
$$=\frac{\dfrac{(n-1000)!}{\cancel{900!}(n-1990)!}\times\dfrac{(n+1)!}{\cancel{1000!}(n-999)!}}{\dfrac{n!}{\cancel{1000!}(n-1000)!}\times\dfrac{(n-999)!}{\cancel{990!}(n-1989)!}}$$
$$=\frac{(n-1000)!(n+1)!}{(n-1990)!(n-999)!}\times\frac{(n-1000)!(n-1989)!}{n!(n-999)!}$$
$$=\underbrace{\frac{(n+1)!}{n!}}_{=n+1}\times\left(\underbrace{\frac{(n-1000)!}{(n-999)!}}_{=\frac{1}{n-999}}\right)^{2}\times\underbrace{\frac{(n-1989)!}{(n-1990)!}}_{n-1989}$$

$$= \frac{(n+1)(n-1989)}{(n-999)^2}$$
$$= \frac{n^2-1988n-1989}{n^2-1998n+999^2}.$$

Or, $999^2 = (1000-1)^2 = 1000^2 - 2\times 1000 + 1 = 10^6 - 2000 + 1 = 10^6 - 1999$.
Ainsi :

$$\boxed{\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{n^2-1988n-1989}{n^2-1998n+10^6-1999}}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\frac{p_n}{p_{n+1}} \leqslant 1 &\iff n^2-1988n-1989 \leqslant n^2-1998n+10^6-1999\\ &\iff 10n \leqslant 10^6-10\\ &\iff n \leqslant \boxed{10^5-1}.\end{aligned}$$

4. De ce qui précède, on en déduit que la suite (p_n) est croissante jusqu'au rang $n_0 = 10^5 - 1$ et est décroissante ensuite. Elle admet donc un maximum pour $n_0 = 10^5 - 1 = 99999$.
p_n est la probabilité que l'événement A se produise lorsqu'il y a n rats dans les égouts de Paris. Or, l'événement A s'est réalisé. Il semble cohérent de penser que cet événement A s'est réalisé parce que le nombre n de rats effectivement présents dans les égouts de Paris permettait de maximiser les chances de réalisation de cet événement… Toutefois, il faudrait probablement reproduire l'expérience pour « gagner en certitude »…