Fiche TP 10 : Vocabulaire sur les graphes

Définition 1 : Premières définitions sur les graphes

- ⋆ On appelle **graphe** la donnée d'un ensemble $\mathcal{S}$ de points appelés **sommets** et d'un ensemble de lignes $\mathcal{A}$ appelées **arêtes** qui relient certains sommets entre eux (une partie de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ en pratique) :

$$\mathscr{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{A}).$$

- ⋆ Le nombre de sommets d'un graphe s'appelle l'**ordre** du graphe.
- ⋆ Deux sommets reliés entre eux par une arête sont dits **adjacents**. Autrement dit, s_1 et s_2 sont adjacents si

$$(s_1, s_2) \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad (s_2, s_1) \in \mathcal{A}.$$

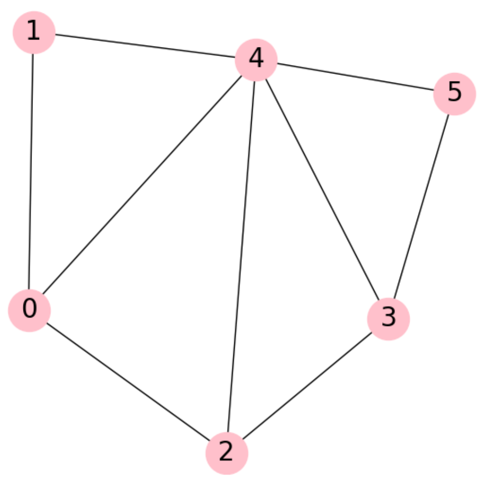
- ⋆ Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes issues de ce sommet.
- ⋆ Un sommet qui n'est adjacent à aucun autre sommet est dit **isolé**.
- ⋆ Un graphe est dit **complet** si deux sommets quelconque distincts sont toujours adjacents.
- ⋆ Dans un **graphe non orienté**, chaque arête peut être parcourue dans les deux sens. Autrement dit,

$$\forall (s_1, s_2) \in \mathcal{A}, \quad (s_2, s_1) \in \mathcal{A}.$$

- ⋆ Dans un **graphe orienté**, chaque arête peut être parcourue dans un seul sens indiqué par une flèche.

Exemple :

On considère le graphe non orienté suivant. On le notera $\mathscr{G}$ dans la suite de cette fiche.



(i) Quel est le degré du sommet 0 ?

. . . .

(ii) Quels sont les sommets adjacents au sommet 0 ?

. . . .

(iii) Le graphe est-il complet ? Justifier.

. . . .

Remarque : **Boucle et graphe multi-arêtes**.

- ⋆ Un graphe, orienté ou non, peut contenir des **boucles** c'est-à-dire une arête dont l'origine et l'extrémité correspondent au même sommet.
- ⋆ Il peut aussi être **multi-arêtes** dans le sens où deux sommets distincts peuvent être reliés par des arêtes différentes.

Néanmoins, les graphes que nous étudierons cette année seront **simples** dans le sens où ils ne présenteront ni boucle, ni arête multiple.

Implémenter un graphe à l'aide d'un dictionnaire

- ⋆ la clé correspond à un sommet,
- ⋆ la valeur associée à la clé est la liste des sommets adjacents.

Pour implémenter $\mathscr{G}$, on écrit :

```
G = {}
G[0] = [1,2,4] ..........................................................................
```

....

....

....

....

....

Implémenter un graphe à l'aide d'une liste d'adjacence

- ⋆ on numérote les n sommets de 0 à $n-1$,
- ⋆ la valeur dans la liste d'adjacence à la position i est la liste des sommets adjacents au sommet numéro i.

Pour implémenter $\mathscr{G}$, on écrit :

```
LG = ....................................................................................
```

Définition 2 : Matrice d'adjacence

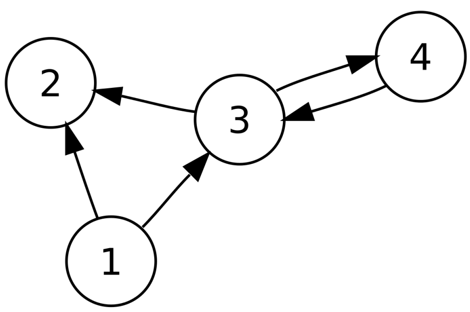
Soit $\mathscr{G}$ un graphe simple non pondéré d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. On numérote ses sommets de 1 à n. On appelle **matrice d'adjacence** associée au graphe $\mathscr{G}$ la matrice dont le terme a_{ij} (pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$) vaut 1 s'il existe une arête permettant d'aller du sommet i vers le sommet j et 0 sinon.

Remarque : Dans le cas d'un graphe non orienté, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, les coefficients a_{ij} et a_{ji} sont égaux. En revanche dans le cas d'un graphe orienté, la matrice d'adjacence n'est a priori pas symétrique.

Exemple : La matrice adjacente associée au graphe $\mathscr{G}$ est :

Exemple :

On considère le graphe orienté $\mathscr{G}_o$ ci-contre.
Sa matrice d'adjacence est :



Matrice d'adjacence en langage Python

On rappelle qu'il est possible de définir des matrices grâce au module `numpy`.
L'instruction `np.zeros((n,n))` permet notamment de définir une matrice nulle de taille n (matrice que l'on peut ensuite modifier pour remplacer les 0 par des 1 aux positions où cela est opportun).

Définition 3 : Chemin entre deux sommets, graphe connexe

Soit $\mathscr{G}$ un graphe non pondéré.

- ⋆ On appelle **chemin** ou **chaîne** sur $\mathscr{G}$ toute suite ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant.
- ⋆ La **longueur** d'un chemin sur un graphe non pondéré est le nombre d'arêtes qu'il comporte.
- ⋆ Un graphe est dit **connexe** si quels que soient les sommets s_i et s_j, il existe toujours un chemin reliant s_i à s_j.

Exemple : Sur le graphe $\mathscr{G}$, donner :

(i) Un chemin reliant 0 à 5 : ....

(ii) Un chemin de longueur 4 reliant 0 à 5 : ....

Exemple : Le graphe $\mathscr{G}$ est connexe. Dessiner un graphe non connexe :

Théorème 1 : Nombre de chemins de longueur k

Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dont les sommets sont numérotés de 1 à n, soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Le terme m_{ij} de la matrice A^k est égal au nombre de chemins de longueur k reliant les sommets i et j dans ce graphe.

▾ *Démonstration* : Ce résultat se démontre par récurrence sur k.

Exemple : On donne, en notant A la matrice d'adjacence du graphe $\mathscr{G}$, la matrice

$$A^4 = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 16 & 19 & 24 & 12 \\ 12 & 12 & 16 & 12 & 16 & 11 \\ 16 & 16 & 23 & 16 & 24 & 16 \\ 19 & 12 & 16 & 20 & 24 & 12 \\ 24 & 16 & 24 & 24 & 39 & 16 \\ 12 & 11 & 16 & 12 & 16 & 12 \end{pmatrix}.$$

(i) Combien y a-t-il de chemins de longueur 4 reliant reliant 0 à 5 ? ....

(ii) Entre quels sommets distincts existe-il le plus de chemins de longueur 4 ?

....