Chapitre # (ALG) 9
Polynômes

Résumé & Plan

On étudie dans ce chapitre des fonctions particulières, que l'on appelle polynômes. Ces fonctions bénéficient de propriétés de factorisations très particulières.

Je rêve d'un jour où l'égoïsme ne régnera plus dans les sciences, où on s'associera pour étudier, au lieu d'envoyer aux académiciens des plis cachetés, on s'empressera de publier ses moindres observations pour peu qu'elles soient nouvelles, et on ajoutera « je ne sais pas le reste ».

— Évariste Galois

- Les énoncés importants (hors définitions) sont indiqués par un ♥.
- Les énoncés et faits à la limite du programme, mais très classiques parfois, seront indiqués par le logo [H.P] . Si vous souhaitez les utiliser à un concours, il faut donc en connaître la preuve ou la méthode mise en jeu. Ils doivent être considérés comme un exercice important.
- Les preuves déjà tapées sont généralement des démonstrations non exigibles en BCPST, qui peuvent être lues uniquement par les curieuses et curieux. Nous n'en parlerons pas en cours.

1. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES NOTATIONS

1.1. Définitions

GÉNÉRALITÉS. Définissons la définition de monôme, ce qui conduira à la définition de *polynôme* (*plusieurs* monômes).

Définition 1 | Notation X, monômes

On note : $\mathrm{X} : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ et plus généralement, on appelle **monôme** toute fonction s'écrivant sous la forme $a\mathrm{X}^n : \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{X} & \longmapsto & ax^n \end{array}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1 (Quelques monômes)

- L'expression $5\mathrm{X}^3$ est un monôme désignant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3$.
- La fonction X^0 est la fonction constante égale à 1.

Définition 2 | Polynômes à coefficients réels, ensemble $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$

On appelle polynôme P à coefficients dans $\mathbb{R}$ toute expression de la forme

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k = a_0 + a_1\mathrm{X} + a_2\mathrm{X}^2 + \cdots + a_n\mathrm{X}^n$$

où $n \in \mathbb{N}$ et $\underbrace{(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n)}_{\text{Coefficients du polynôme}} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Le polynôme nul est la fonction constante égale à 0.

Notation Ensemble $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Exemple 2 $\mathrm{P} = \mathrm{X}^4 - 5\mathrm{X} + 1$ est un polynôme à coefficients réels, ce qui se note : $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Remarque 1 (Cas particuliers)

- **[Polynôme nul]** On note 0 le polynôme nul (tous les coefficients sont égaux à 0).
- **[Polynômes constants]** On appelle polynôme constant tout polynôme de la forme a_0 où $a_0 \in \mathbb{R}$.

Notation

Parfois le polynôme P est aussi noté P(X), la notation P(X) désigne donc encore une fonction.

Attention

Les notations $1, X, X^2, \cdots, X^n$, P désignent des fonctions polynomiales et pas des nombres. Comme pour les fonctions, P ou P(X) désignent des fonctions où $P(x)$, avec $x \in \mathbb{R}$ désigne l'image par P de x donc un nombre.

DEGRÉ. Moralement, le degré d'un polynôme est la puissance maximale qui apparaît dans l'écruture d'un polynôme.

Définition 3 | Degré d'un polynôme, ensemble $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non nul dans $\mathbb{R}[X]$.

- On appelle **degré de** P et on note deg(P), le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. On convient que : $\boxed{\deg 0 = -\infty}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.

Attention

Une écriture du type $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ne signifie pas a priori que $\deg(P) = n$! C'est le cas seulement si $a_n \neq 0$. Ainsi, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ signifie juste que $\deg(P) \leq n$.

Exemple 3 (Degrés de polynômes.)

1. Déterminer le degré du polynôme $P = X^2 + 5X^3 + X^9$.

2. Dans $\mathbb{R}[X]$, donner un exemple de polynôme Q de degré 2, de polynôme R de degré 5, de polynôme S de degré 0, de polynôme T dans $\mathbb{R}_{2024}[X]$.

3. Ecrire de façon ensembliste $\mathbb{R}_0[X], \mathbb{R}_1[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$.

Remarque 2 (Polynômes constants) $\mathbb{R}_0[X]$ est ainsi l'ensemble des polynômes constants.

Attention

Si P est un polynôme : $\deg(P) = 0$ n'implique pas $P = 0$! *(En effet, le polynôme nul est de degré $-\infty$ par définition.)* Cela implique plutôt que P est un polynôme constant égal à c, où $\boxed{c \in \mathbb{R}^\star}$

Ainsi, les polynômes constants ont un degré inférieur ou égal à 0 (et pas forcément 0, car il ne faut pas oublier le cas du polynôme nul).

Définition 4 | Termes de plus haut degré

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $a_n \neq 0$ (autrement dit : $\deg(P) = n$).

- $a_n X^n$ est appelé **monôme dominant** (ou **terme dominant**) de P.
- a_n est appelé **coefficient dominant** de P.
- Lorsque le coefficient dominant est égal à 1, le polynôme est dit **unitaire**.

Exemple 4 Si $P = 3X^4 + 12X^7$, donner son terme dominant et son coefficient dominant. Est-il unitaire ?

EGALITÉ ENTRE POLYNÔMES. La définition ci-après indique un polynôme est essentiellement caractérisé par son degré et ses coefficients.

Définition 5 | Egalité entre deux polynômes
On dit que deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont **même degré** et **mêmes coefficients**.

Cette définition peut se retraduite mathématiquement de la façon suivante.

Proposition 1 | Unicité des coefficients
Soient $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

$$P=0 \iff \forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=0 \iff \underbrace{a_0=a_1=\cdots=a_n=0.}_{\text{les coefficients de P sont tous nuls.}}$$

$$P=Q \iff \forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=Q(x) \iff \underbrace{a_0=b_0,\cdots,a_n=b_n.}_{\text{les coefficients de P et Q sont égaux.}}$$

Remarque 3 Lorsque deux polynômes sont égaux, on pourra raisonner **par identification des coefficients**. En particulier, si on obtient qu'un polynôme est nul, on peut écrire que tous ses coefficients sont nuls.

Exemple 5 Soient $P(X)=2X^2+3X-1$ et $Q(X)=2X^2+aX-b$. Alors $P=Q$ si et seulement si $a=3$ et $b=1$.

Remarque 4 (Polynômes à coefficients complexes.) On définit de même $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes et, pour $n\in\mathbb{N}, \mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.
Par exemple : $iX^5+7X^4-2e^{\frac{i\pi}{3}}\in\mathbb{C}_5[X]$.
Conformément au programme de BCPST, dans toute la suite, on travaillera essentiellement avec des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ (les propriétés énoncées étant aussi valables dans $\mathbb{C}[X]$)

1.2. Somme de polynômes, multiplication par une constante

Définition 6 | Somme de polynômes, multiplication par une constante
Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P=\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{q} b_k X^k$.

(Si par exemple $q<p$, on peut écrire $Q=\sum_{k=0}^{p} b_k X^k$ en posant $b_k=0$ pour $q<k\leq p$.)

On définit alors :

- $P+Q=\sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k+b_k)X^k$
- $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda P=\sum_{k=0}^{p}(\lambda a_k)X^k$.

Exemple 6 Si $P=1+3X-X^2$ et $Q=X+X^2$, déterminer les polynômes $P+Q$ et $2P$.

Exemple 7 (Dégré d'une somme.) Dans chaque cas, déterminer deg(P), deg(Q) et deg(P+Q).

1. $P=X^4-X^3+X+1$ et $Q=2X^3-5X+1$.
2. $P=2X^3-X^2+X-1$ et $Q=-2X^3+X^2-1$.
3. $P=-3X^4+X^3+2$ et $Q=-3X^4-X^3+X^2+1$.

Proposition 2 | Degré d'une somme, degré de λP
Pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$,

- $\deg(P+Q)\leqslant\max(\deg(P),\deg(Q))$
- $\forall\lambda\in\mathbb{R},\quad \deg(\lambda P)=\begin{cases}\deg(P) & \text{si } \lambda\neq 0\\ -\infty & \text{si } \lambda=0\end{cases}$

Remarque 5 (Autour du degré de la somme) Si P et Q sont deux polynômes,

- Si $\deg(P)\neq\deg(Q)$, alors $\deg(P+Q)=\max(\deg(P),\deg(Q))$,
- Lorsque P et Q dont deux polynômes non nuls, on a $\deg(P+Q)<\max(\deg(P),\deg(Q))$ si et seulement si P et Q sont de même degré **et de coefficient dominant opposé** (les termes de plus haut degré « s'éliminent »).

1.3. Produit de polynômes

Définition 7 | Produit de deux polynômes

Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$.

(Si par exemple $q < p$, on peut écrire $Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$ en posant $b_k = 0$ pour $q < k \le p$.)

On définit alors le polynôme :

$$PQ = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k, \quad \text{où} \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \quad \text{pour tout } k \in [\![0\,, p+q]\!].$$

Remarque 6 (Explication de le formule définissant c_k)
Dans le produit, le coefficient c_k correspond à tous les produits de termes qui interviennent dans le monôme X^k. Si on « choisit » $a_i X^i$ dans le premier polynôme, alors il faut le multiplier par un monôme de degré X^{k-i} pour obtenir un monôme de degré X^k. On a donc le terme $a_i b_{k-i}$. Il faut ajouter tous les produits ainsi obtenus à partir des différents coefficients de P. On trouve $c_k = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{k-i}$ (en pratique, on utilisera très peu cette formule).

Exemple 8 Soient $P = X^3 + 2X^2 + 1$ et $Q = X^2 - 2X + 1$. Calculer PQ.

Proposition 3 | Degré d'un produit de polynômes
Pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$: $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Remarque 7 On adopte la convention : $-\infty + d = -\infty$ pour tout $d \in \mathbb{N}$ (valable aussi si $d = -\infty$).
Ainsi, la proposition précédente couvre le cas où l'un des deux polynômes P ou Q est nul.

Proposition 4 | Intégrité de l'ensemble des polynômes
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors : $PQ = 0 \iff (P = 0 \quad \text{ou} \quad Q = 0)$.

Ainsi, si le produit de deux fonctions polynomiales est nul, alors l'une des deux fonctions polynomiales est nécessairement nulle. Cette propriété n'est pas valable en général pour les fonctions : le produit de deux fonctions toutes les deux non nulles peut être la fonction nulle.

Preuve

Exemple 9 (Une suite de polynômes) On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$, $P_1 = -2X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = -2XP_{n+1} - 2(n+1)P_n$. Calculer P_2, P_3, P_4 : conjecturer les valeurs du degré et du coefficient dominant de P_n, puis conclure en raisonnant par récurrence.

Enfin, la formule du binôme de Newton reste valable dans $\mathbb{R}[X]$.

Remarque 8 **(Binôme de Newton dans $\mathbb{R}[X]$)** La formule du binôme de Newton reste valable dans l'ensemble $\mathbb{R}[X]$: pour tous polynômes P et Q et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(P(X)+Q(X))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P(X)^k Q(X)^{n-k}.$$

Exemple 10 Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$(X+1)^n - nX - 1 = X^2 Q(X).$$

1.4. Composée de polynômes.

Définition 8 | Composition

On considère deux polynômes $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$. Alors, on définit le polynôme composée :

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^k = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(\sum_{\ell=0}^{q} b_\ell X^\ell \right)^k$$

Exemple 11 Soient $P = 1 + 3X - X^2$ et $Q = 1 + 2X$. Calculer $P \circ Q$ et $Q \circ P$.

Proposition 5 | Degré d'une composée

Pour tous polynômes P et Q non constants de $\mathbb{R}[X]$, on a :

$$\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q).$$

Remarque 9 La condition « non constants » est essentielle - par exemple, si $P(X) = X^2 - 4$ et si $Q(X) = 2$, alors $P \circ Q(X) = P(2) = 0$, mais $-\infty \neq 2 \times 0$.

1.5. Dérivée d'un polynôme

Définition 9 | Polynôme dérivé
On définit le **polynôme dérivé** par analogie aux fonctions.
- Si P est un polynôme constant alors $P'(X) = 0$.
- Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, avec $\deg(P) \geqslant 1$, on appelle *polynôme dérivé de* P le polynôme noté $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$, *i.e.* la dérivée de la fonction P.

Remarque 10 On prendra garde d'éviter décrire l'expression $P' = \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{k-1}$ même si le terme d'ordre $k = 0$ est nul. En effet, nous n'avons pas donné un sens à $0 \times \frac{1}{X}$, ce n'est pas un élément de $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 12 Déterminer P′ lorsque $P = 3X^{10} - 7X^5 + 2$.

Proposition 6 | Degré de la dérivée d'un polynôme
Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$:
- $\deg(P') = \deg(P) - 1$ si P n'est pas constant,
- $\deg(P') = -\infty$ si P est constant.

Les propriétés de la dérivation de polynômes sont analogue aux propriétés de dérivation de fonctions.

Proposition 7 | Dérivations et opérations
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $(\lambda P)' = \lambda P'$,
2. $(P + Q)' = P' + Q'$,
3. $(PQ)' = P'Q + PQ'$,
4. $(P \circ Q)' = Q' \times P' \circ Q$.

En outre, la définition de dérivée successive d'une fonction se transpose aux polynômes.

Définition 10 | Dérivées successives d'un polynôme
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On définit les *polynômes dérivés successifs* de P par :

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall j \in \mathbb{N}, \quad P^{(j+1)} = \left[P^{(j)}\right]' \end{cases}$$

Remarque 11 Si $p \in \mathbb{N}^\star$, $P^{(p)}$ est donc le polynôme P dérivé p fois.

Exemple 13 Calculer $(X^2)'$, $(X^2)^{(2)}$, $(X^2)^{(3)}$

Proposition 8 | Degré d'un polynôme dérivé plusieurs fois
Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\deg\left(P^{(k)}\right) = \begin{cases} \deg P - k & \text{si } k \leqslant \deg P, \\ -\infty & \text{si } k > \deg P. \end{cases}$$

Exemple 14 Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Calculer :

1. $(X^n)^{(0)}$
2. $(X^n)'$
3. $(X^n)^{(2)}$
4. $(X^n)^{(3)}$
5. $(X^n)^{(n)}$
6. $(X^n)^{(n+1)}$.

Proposition 9 | Dériver plus de fois que le degré
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$.
Alors pour tout $p > n$, $P^{(p)} = 0$. En particulier, $P^{(n+1)} = 0$.

2. DIVISION EUCLIDIENNE

Théorème 1 | Division euclidienne de polynômes

Soient $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$, avec $B \neq 0$.
Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$$

Lorsqu'on a obtenu cette écriture, on dit qu'on a effectué la division euclidienne de A par B. A est le **dividende**, B le **diviseur**, Q le **quotient**, et R le **reste**.

Définition 11 | Divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$

Soient $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$, avec $B \neq 0$.
On dit que A **est divisible par** B dans $\mathbb{R}[X]$ lorsque le reste de la division euclidienne de A par B est nul. On dit aussi que B **divise** A ou que B **est un diviseur de** A, ou que A **est un multiple de** B. Il existe alors $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = BQ$.

Exemple 15 $X^3 - 1$ est divisible par $X - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ car $X^3 - 1 = (X - 1)\left(X^2 + X + 1\right)$.

Exemple 16 La méthode de division euclidienne permet d'obtenir le couple (Q, R). Illustrons cette méthode par la division euclidienne de X^3 par $X - 2$.

Exemple 17 Effectuer la division euclidienne de $X^3 - 1$ par $X - 1$.

Exemple 18 Effectuer la division euclidienne de $A_2 = X^4 - X^3 + X - 1$ par $B_2 = X^2 + 1$.

3. RACINES

3.1. Définition

Définition 12 | Racine d'un polynôme
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On dit que α est une **racine réelle** de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Exemple 19 (Quelques polynômes, avec ou sans racines)

-
-
-
-

Proposition 10 | Degré impair et existence d'une racine réelle
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair. Alors, P possède au moins une racine réelle.

Preuve *(Point clef — **théorème des valeurs intermédiaires**)*
Appliquons le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction :

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow P(x) = a_{2p+1}x^{2p+1} + a_{2p}x^{2p} + \cdots + a_0,$$

avec $a_0, \ldots, a_{2p+1} \in \mathbb{R}$ les coefficients de P, et supposons par exemple que $a_{2p+1} > 0$ (le même type de raisonnement s'applique si $a_{2p+1} < 0$). Alors :

3.2. Factorisation

Théorème 2 | Factorisation (avec une racine)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
α est une racine de P $\iff$ P est divisible par $X - \alpha$, *i.e.* il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)Q(X)$.

Preuve

$\Longleftarrow$

$\Longrightarrow$

Exemple 20 Soit P le polynôme défini par $P(X) = X^3 - 2X + 1$.

1. Montrer que 1 est racine de P.

2. Factoriser P par $(X - 1)$ à l'aide de deux méthodes.
   - ***Méthode 1 : en identifiant les coefficients.***
   - ***Méthode 2 : à l'aide d'une division euclidienne.***

Proposition 11 | Factorisation (avec plusieurs racines)

Si $a_1, \dots, a_r$ sont des racines distinctes de $P \in \mathbb{R}[X]$ (où $r \in \mathbb{N}^\star$), alors :

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X], \quad P(X) = (X - a_1) \dots (X - a_r)\, Q(X).$$

Autrement dit, P est divisible par $(X - a_1) \dots (X - a_r)$.

Preuve *(Idée de la démonstration)*

Théorème 3 | Polynôme possédant « trop » de racines $\Longrightarrow$ Polynôme nul

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Si : $\deg(P) \leq n$, et si P possède au moins $n+1$ racines, alors P est le polynôme nul.

Preuve

Ce théorème extrêment important peut se retenir en une phrase :

Si P possède strictement plus de racines que son degré, alors c'est le polynôme nul.

Exemple 21 Soient a, b, c trois réels distincts.
Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(a) = P(b) = P(c) = 0$. Que dire de P ?

Exemple 22 Soient a, b, c trois réels distincts. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ tels que

$$P(a) = Q(a), \quad P(b) = Q(b) \quad \text{et} \quad P(c) = Q(c).$$

Montrer que $P = Q$.

Remarque 12 La méthode utilisée dans l'exemple précédent est à retenir : pour montrer que deux polynômes P et Q sont égaux, on peut montrer que le polynôme $P-Q$ est le polynôme nul en montrant que $P-Q$ a plus de racines que son degré.

Une conséquence importante du Théorème précédent est la suivante :

Si P possède une infinité de racines, alors c'est le polynôme nul.

(En effet, si un polynôme possède une infinité de racines, il possède a fortiori strictement plus de racines que son degré, donc c'est le polynôme nul.)

Exemple 23 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$ est-elle polynomiale ?

Exemple 24 Que dire d'un polynôme P vérifiant $P(e^x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Corollaire 1 | Nombre maximal de racines
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul, de degré $n \geqslant 0$.
Alors, P possède au maximum n racines.

On en déduit que tout polynôme non nul possède un nombre fini de racines, et qu'un polynôme possède une infinité de racines si et seulement si c'est le polynôme nul.

Enfin, si l'on connaît n racines distinctes d'un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}^\star$ et le coefficient dominant dudit polynôme, on peut factoriser P sous la forme suivante.

Proposition 12 | Factorisation avec toutes les racines
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n (avec $n \geqslant 1$), de coefficient dominant λ. Si $a_1, \ldots, a_n$ sont des racines de P deux à deux distinctes, alors

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$$

Exemple 25 Factoriser le polynôme $P = 2X^3 - 16X^2 + 10X + 28$ sachant qu'il possède -1, 2 et 7 comme racines.

En général, il n'y a aucune raison pour qu'un polynôme ait des racines deux à deux distinctes. C'est l'objet de la prochaine partie.

3.3. Ordre de multiplicité d'une racine

Un nombre peut être racine « plusieurs fois » d'un polynôme P. Par exemple, si on définit $P = (X-3)^2$, le nombre 3 est une racine qui « compte » deux fois : on dira qu'elle est double.

Définition 13 | Ordre d'une racine
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est :
- **racine simple** de P si $P(X) = (X-a)Q(X)$ et $Q(a) \neq 0$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$,
- **racine double** de P si $P(X) = (X-a)^2 Q(X)$ et $Q(a) \neq 0$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$,
- **racine d'ordre** $k \in \mathbb{N}^\star$ de P si $P(X) = (X-a)^k Q(X)$ et $Q(a) \neq 0$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$,
- **racine d'ordre au moins** $k \in \mathbb{N}^\star$ de P si $P(X) = (X-a)^k Q(X)$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$.

Si a est une racine d'ordre k de P, on dit aussi que a est une racine de P de **multiplicité** k.

Remarque 13 On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est une **racine multiple** de $P \in \mathbb{R}[X]$ si α est une racine d'ordre au moins 2 de P.

Exemple 26 Si $P = (X-4)^{104}(X^2+1)$, alors 4 est racine de P d'ordre 104.

Exemple 27 **(Pour les polynômes de degré deux)** Soit $P = aX^2 + bX + c$, où a, b, c sont trois réels avec $a \neq 0$.

Proposition 13 | Caractérisation du caractère multiple d'une racine par le polynôme dérivé
Une racine $\alpha \in \mathbb{R}$ d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est une racine multiple de P si et seulement si $P'(\alpha) = 0$, autrement dit si α est aussi une racine de P'.

Preuve

On va désormais chercher à raffiner la proposition précédente pour connaître avec précision la multiplicité d'une racine d'un polynôme, à l'aide des dérivées successives du polynôme.

Exemple 28 Si l'on considère $P = (X-1)^2$, on voit que 1 est une racine de multiplicité 2. Calculons $P(1)$, $P'(1)$ et $P^{(2)}(1)$.

Ce fait s'étend à n'importe quel polynôme et caractérise même les racines multiples.

Théorème 4 | Lien entre multiplicité et racines des dérivées successives

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^\star$.

$$\alpha \text{ est une racine de P d'ordre } k \iff \begin{cases} \forall r \in [\![0; k-1]\!], \quad P^{(r)}(\alpha) = 0 \\ P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

Preuve Nous admettons ce théorème, dont la preuve la plus simple nécessite l'utilisation d'une formule hors-programme : la formule de TAYLOR pour les polynômes.

Exemple 29 Soit $P = X^3 - 3X + 2$.

1. Montrer que 1 est racine de $P = X^3 - 3X + 2$ et déterminer sa multiplicité

2. Factoriser P par $(X-1)^m$ où m est la multiplicité de 1 en tant que racine de P.

On peut alors généraliser la **Proposition 12**.

Proposition 14 | Factorisation avec les racines multiples

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ possédant p racines $a_1, \ldots, a_p$ (avec $p \geqslant 1$) deux à deux distinctes, d'ordres de multiplicité respectifs $k_1, \ldots, k_p$. Alors :

$$\sum_{i=1}^{p} k_i \leqslant \deg(P) \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{k_i} \text{ divise } P.$$

De plus, en notant λ le coefficient dominant de P :

$$\sum_{i=1}^{p} k_i = \deg(P) \iff P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{k_i}.$$

Autrement dit :

- la somme des multiplicités des racines d'un polynôme est inférieure ou égale à son degré,
- si cette somme vaut le degré de P, alors on connaît toutes les racines de P et on peut le factoriser.

Exemple 30 Déterminer une factorisation du polynôme P de degré 6 possédant 4 comme coefficient dominant, 1 comme racine double, -5 comme racine simple et 8 comme racine triple.

4. EXERCICES

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour les travailler, il s'agit de refaire les exemples du cours et les exercices associés à chaque item.

Savoir-faire

1. Savoir manipuler la notion de degré (définition, opérations) .... ☐
2. En particulier, savoir calculer un monôme dominant afin de trouver le degré .... ☐
3. Savoir manipuler la notion de dérivation de polynôme .... ☐
4. Connaître la notion de racine (simple et multiple) .... ☐
5. Savoir compter des racines et comparer au degré .... ☐
6. Savoir factoriser un polynôme .... ☐

Exercice 1 | Vrai ou Faux ? Solution

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(-P) = \deg P$.
2. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\deg(P - Q) \leqslant \deg P - \deg Q$.
3. Un polynôme constant est de degré nul.
4. Le polynôme $X - 2$ divise $P = X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 3X^2 + 7X + 6$.
5. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est une racine de multiplicité n d'un polynôme P, alors $P^{(n)}(\alpha) = 0$.

Exercice 2 | Vrai ou Faux ? Solution

1. Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 8 :
   - **(a)** admet exactement 8 racines réelles comptées avec multiplicité.
   - **(b)** admet au moins une racine réelle.
   - **(c)** admet au plus 8 racines réelles comptées avec multiplicité.
   - **(d)** admet au moins 8 racines réelles comptées avec multiplicité.
2. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$:
   - **(a)** a racine de P $\iff$ $X - a$ divise P
   - **(b)** a racine de P de multiplicité supérieure à k $\iff$ $(X - a)^k$ divise P
   - **(c)** a racine de P de multiplicité supérieure à k $\iff$ $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k)}(a) = 0$.
   - **(d)** La somme des multiplicités des racines de P est inférieure ou égale à n.
3. Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ admet au moins une racine réelle.
4. Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.
5. Tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n admet exactement n racines distinctes.
6. Il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que P soit borné sur $\mathbb{R}$.
7. Il existe des polynômes non constants qui prennent une infinité de fois la même valeur.
8. Si $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ alors $\deg(P) \neq \deg(Q)$.

4.1. Opérations sur les polynômes, Simplifications

Exercice 3 | Solution On pose $P = X^2 + 3X$, $Q = X^2 + X + 1$, $S = X^2 - 1$.

1. Calculer P^2, $P - Q$ et $P^2 - Q^2$.
2. Calculer $P(X + 1)$.
3. Calculer $S \circ f$ avec $f : t \longmapsto \cos(t)$.

Exercice 4 | Solution

1. Écrire le polynôme ci-après sans symbole somme : $R = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k$.
2. En déduire son degré et coefficient dominant.

4.2. Degré et coefficients

Exercice 5 | Solution Déterminer le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants où n désigne un entier strictement positif et P un polynôme de degré n et de coefficient dominant $a_n \neq 0$.

1. $(X^4 + 1)^3$
2. $(X + 1)^n - (X - 1)^n$
3. $P^2 - P + 1$

Exercice 6 | Solution Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le degré de $\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$ en fonction de celui de P.

Exercice 7 | Solution Dans les deux cas suivants, déterminer tous les polynômes P vérifiant les conditions indiquées

1. $\deg(P) = 3$ et $P(1) = 4$, $P(-1) = 0$, $P(-2) = -5$, $P(2) = 15$.
2. $\deg(P) \leqslant 2$ et $P^2 = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 4$.

4.3. Racines & Factorisation

Exercice 8 | **Calculs d'images.** Solution Soient a, b, c trois réels distincts et

$$P(X) = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(X-c)(X-a)}{(b-c)(b-a)}.$$

Calculer $P(a), P(b)$ et $P(c)$. Qu'en déduisez-vous pour P ?

Exercice 9 | **Polynôme constant.** Solution Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X + 1) = P(X)$. Montrer que P est un polynôme constant.

Exercice 10 | **Racines d'un polynôme de degré 3 et d'un polynôme de degré 6.** Solution

Soit P le polynôme défini par $P(X) = X^3 + 4X^2 + X - 6$.

1. Montrer que 1 est racine de P.
2. Déterminer le polynôme Q tel que $P(X) = (X - 1)Q(X)$.
3. Déterminer les racines de P. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Soit S le polynôme défini par $S(X) = X^6 + 4X^4 + X^2 - 6$. Déterminer les racines réelles de S.

Exercice 11 | **Multiplicité d'une racine.** Solution

Montrer que 2 est racine du polynôme $P = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$ et déterminer l'ordre de multiplicité de cette racine.

Exercice 12 | **Multiplicité d'une racine.** Solution Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Montrer que 1 est racine d'ordre de multiplicité 3 du polynôme

$$P = nX^{n+2} - (n + 2)X^{n+1} + (n + 2)X - n.$$

Exercice 13 | **Le polynôme possède-t-il des racines multiples ?** Solution Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{R}[X]$. Le polynôme P admet-il des racines multiples ?

Exercice 14 | Solution Déterminer le nombre a de manière à ce que le polynôme $P = X^5 - aX^2 - aX + 1$ ait -1 comme racine au moins double.

Exercice 15 | Solution Soit n un entier non nul. Montrer que a donné est racine du polynôme et déterminer l'ordre de multiplicité de cette racine

1. $a = 2$ et $P = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$
2. $a = 1$ et $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$

Exercice 16 | Solution Déterminer pour chaque exemple si Q est factorisable par P (c'est-à-dire si $P \mid Q$).

1. $P = X - 1$ et $Q = X^3 - 2X^2 + 3X - 2$, et déterminer le cas échéant un polynôme R tel que $Q = PR$.
2. $P = X - 2$ et $Q = X^4 - 3X^3 + X + 1$, et déterminer le cas échéant un polynôme R tel que $Q = PR$.
3. $P = X^2$ et $Q = (X + 1)^n - nX - 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

4.4. Équations polynomiales

Exercice 17 | Solution

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(P')^2 = 4P$. Montrer que si P n'est pas constant alors $\deg P = 2$.
2. En déduire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant : $(P')^2 = 4P$.

Exercice 18 | Solution On cherche ici à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que : $P(X^2) = (X^2+1)P$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}$ vérifiant $P(X^2) = (X^2+1)P$. Quel est son degré ?
2. Déterminer P à l'aide d'une identification des coefficients.
3. Retrouver l'expression de P en déterminant ses racines.

Exercice 19 | **Degrés de polynômes.** Solution

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme, on note $p = \deg P$.
   1.1) Quel est le degré de P' ?
   1.2) Quel est le degré de $XP'(X)$?
   1.3) Quel est le degré de $XP'(X) - P(X)$?
2. Résoudre l'équation $XP'(X) - P(X) = 0$, où $P \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 20 | **Application** Solution Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(P) = (3X+1)P - X(X-1)P'.$$

1. Vérifier que φ définit bien une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. 2.1) Pour quelles valeurs de n a-t-on $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$?
   2.2) Pour ces valeurs de n, déterminer les polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\varphi(P) = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\varphi(P) = X^2$.

4.5. Familles & Suites de polynômes

Exercice 21 | Solution Soit $P = X^2 - X + 1$ et $Q = X^3 - X$. On définit une suite de polynômes (P_n) telle que : $\begin{cases} P_1 = P, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = XP_n(Q) + 2QP_n. \end{cases}$

1. Calculer P_2.
2. Calculer les degrés de P_2 et P_3.
3. Déterminer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ le degré de P_n.
4. Déterminer le coefficient dominant de P_n.

Exercice 22 | **Polynômes d'Hermite** Solution On considère la suite (H_n) de polynômes, telle que $H_0(X) = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$H_{n+1} = H_n' - 2XH_n.$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_n \in \mathbb{R}[X]$, et donner H_1, H_2.
2. Déterminer le degré de H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer le coefficient dominant de H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.