Devoir maison n°9
à rendre le Jeudi 21/03/2024

Consignes

- Les devoirs maison sont facultatifs. Pour autant, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Il est rappelé également que recopier une correction sur internet est complètement inutile pour tout le monde.**

Exercice 1 | Polynômes de Tchebychev Solution On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = X, \qquad \text{et :} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. (a) Calculer T_2, T_3 et T_4.

(b) Calculer le degré et le coefficient dominant de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

2. (a) Soient a et b deux nombres réels. Montrer que :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. *Indication : On effectuera une récurrence double.*

(c) Déterminer ainsi $T_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

(i) Pour tout entier naturel $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on pose

$$r_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right).$$

En utilisant la question **2. (b)**, montrer que les r_k (pour $k \in [\![0, n-1]\!]$) sont des racines de T_n.

(ii) Combien de racines distinctes a-t-on ainsi obtenues ? Que peut-on en déduire ? *(On justifiera soigneusement que les racines obtenues sont bien distinctes)*

(e) Donner la forme factorisée de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un polynôme S_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(n\theta) = S_n(\cos(\theta)).$$

On pose de plus : $R_n = T_n - S_n$.

(a) Calculer $R_n(\cos(\theta))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

(b) Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer qu'il existe un unique réel $\theta \in [0, \pi]$ de sorte que $x = \cos(\theta)$.

(c) Déduire des questions **3. (a)** et **3. (b)** que $S_n = T_n$.

CORRECTION

Solution (exercice 1) Énoncé

1. (a) Grâce à la relation de récurrence, on trouve $T_2 = 2XT_1 - T_0$, soit $\boxed{T_2 = 2X^2 - 1}$, puis de même $\boxed{T_3 = 4X^3 - 3X}$ et $\boxed{T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1}$.

(b) Montrons par double récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante :

$$\mathscr{H}(n) : T_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } 2^{n-1}.$$

Initialisation. on a $T_1 = X$, qui est bien un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant $2^{1-1} = 2^0 = 1$. De même, $T_2 = 2X^2 - 1$ est un polynôme de degré 2 et de coefficient dominant $2^{2-1} = 2^1 = 2$.

Hérédité. soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, supposons $\mathscr{H}(n)$ et $\mathscr{H}(n+1)$ vraies. Montrons que $\mathscr{H}(n+2)$ est vraie. On a Par hypothèse de récurrence, il existe un polynôme Q (respectivement un polynôme R) de degré inférieur ou égal à n (respectivement $n-1$) tels que $T_{n+1} = 2^n X^{n+1} + Q$ et $T_n = 2^{n-1}X^n + R$. Donc on a

$$T_{n+2} = 2X(2^n X^{n+1} + Q) - 2^{n-1}X^n - R,$$

soit

$$T_{n+2} = 2^{n+1}X^{n+2} + S$$

avec $S = 2XQ - 2^{n-1}X^n - R$ un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$ (en tant que somme de tels polynômes). Donc T_{n+2} est bien de degré $n+2$ et de coefficient dominant égal à 2^{n+1}, et $\mathscr{H}(n+2)$ est démontrée. D'où le résultat par le principe de récurrence :

$\boxed{T_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ et de coefficient dominant } 2^{n-1}}$.

2. (a) Puisque $\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b, \end{cases}$ en additionnant ces deux égalités membre à membre, on obtient :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$$

ce qui donne : $\boxed{\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))}$

(b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrons par double récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété sui-

vante : $\mathscr{P}(n) : \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Initialisation. on a d'une part $\mathrm{T}_0(\cos\theta) = 1$, et d'autre part $\cos(0\times\theta) = 1$, donc on a $\mathscr{P}(0)$ est vraie. De même, on a d'une part $\mathrm{T}_1(\cos\theta) = \cos\theta$, et d'autre part $\cos(1\times\theta) = \cos\theta$, donc on a $\mathscr{P}(1)$ vraie.

Hérédité. soit $n \in \mathbb{N}$ fixé de sorte que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{n+2}(\cos\theta) &= 2\cos\theta\mathrm{T}_{n+1}(\cos\theta) - \mathrm{T}_n(\cos\theta) && \textit{par hypothèse de récurrence}\\
&= 2\cos\theta\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) && \textit{Par la question précédente}\\
&= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta)\\
&= \cos((n+2)\theta).
\end{aligned}$$

On a donc $\mathscr{P}(n+2)$ vraie. Par principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{\mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)}$.

(c) On a $0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$, donc on a

$$\mathrm{T}_n(0) = \mathrm{T}_n\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right),$$

d'après la question précédente. On en déduit :

$$\boxed{\mathrm{T}_n(0) = 0 \text{ si n est impair}, (-1)^{\frac{n}{2}} \text{ si n est pair.}}$$

(d) **(i)** Soit $k \in [\![0\,,\,n-1]\!]$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_n(r_k) &= \mathrm{T}_n\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) && \textit{D'après la question 2.(b)}\\
&= \cos\left(\cancel{n}\frac{2k+1}{2\cancel{n}}\pi\right)\\
&= \cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

On obtient bien que : $\boxed{r_k \text{ est racine de } \mathrm{T}_n}$

(ii) Notons que si $k \in [\![0, n-1]\!]$, alors $\frac{2k+1}{2n}\pi \in [0,\pi[$ et si k_1 et k_2 sont deux entiers distincts compris entre 0 et $n-1$, alors $\frac{2k_1+1}{2n}\pi \neq \frac{2k_2+1}{2n}\pi$. Par stricte décroissance de la fonction cosinus sur $[0,\pi[$, on obtient : $\underbrace{\cos\left(\frac{2k_1+1}{2n}\pi\right)}_{r_{k_1}} \neq \underbrace{\cos\left(\frac{2k_2+1}{2n}\pi\right)}_{r_{k_2}}$. Les r_k sont donc deux à deux distincts. Ainsi, les r_k sont exactement les racines de T_n car T_n possède au plus n racines distinctes (car $\deg(\mathrm{T}_n) = n$), et on connaît n racines de T_n, à savoir les r_k.

(e) On a trouvé les n racines de T_n, et on a montré que son coefficient dominant est 2^{n-1}. Donc T_n se factorise de la façon suivante :

$$\boxed{\mathrm{T}_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{X} - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)}.$$

3. **(a)** On a, d'après la question 2b) :

$$\mathrm{R}_n(\cos\theta) = \mathrm{T}_n(\cos\theta) - \mathrm{S}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) - \cos(n\theta),$$

soit : $\boxed{\mathrm{R}_n(\cos\theta) = 0}$.

(b) La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0,\pi]$ donc d'après le théorème de la bijection, la fonction cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[\cos(\pi), \cos(0)] = [-1,1]$. Ainsi, pour tout $x \in [-1,1]$, il existe un unique réel $\theta \in [0,\pi]$ de sorte que $x = \cos(\theta)$.

(c) Soit $x \in [-1,1]$. Soit $\theta \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$.
On a : $\mathrm{R}_n(x) = \mathrm{R}_n(\cos(\theta))$, donc : $\mathrm{R}_n(x) = 0$.
Ainsi, tout nombre réel x dans l'intervalle $[-1,1]$ est racine de R_n. On en déduit que R_n admet une infinité de racines : c'est le polynôme nul.
D'où : $\boxed{\mathrm{S}_n = \mathrm{T}_n}$.